Math.p.
224
g-2

Math. L.
2249-2

<36636489140017

<36636489140017

Bayer. Staatsbibliothek

R

Anleitung

zur

Elementar-Arithmetik

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Königlich Baierischem Schulrathe, Director des K. Lyceums und der K. Gymnasial-Anstalt zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik am Lyceum, erstem Professor an dem K. Forstinstitute, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde, und der Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn.

Zweyter Theil.

Höhere Elementar-Arithmetik.

Zweyte verbesserte und sehr vermehrte Auflage.

Offenbach,

verlegt und gedruckt bey Carl Ludwig Brede.

1821.

Vorwort.

Das mathematische Publicum erhält hiermit den zweyten Theil meiner Elementar-Arithmetik. Nur die Abtheilung von der Ausziehung der Quadratwurzel ist von der ersten Auflage beybehalten und an mehreren Stellen umgearbeitet worden. Die übrigen fünf Abtheilungen sind neu hinzugekommen; so, daß dieser zweyte Theil nicht sowohl als neue Auflage, sondern vielmehr als neue Schrift erscheinet.

Der Zwischenraum von zwey Jahren, welcher den zweyten Theil von dem ersten trennt, hat seinen Grund in dem sehr vermehrten Geschäftskreise des Verfassers, welchem seit dem Studienjahre 1818 in 1819, ausser der Direction des K. Lyceums dahier, auch das Directorium der K. Gymnasial-Anstalt Allerhöchsten Ortes übertragen worden ist. Da aber dieser zweyte

Theil, obgleich gestützt auf die Lehren des ersten, ein für sich selbst abgeschlossenes (höheres) Ganzes bildet, so kann diese Verspätung nicht nachtheilig auf seinen Gebrauch einwirken.

Der Verfasser hat sich bemühet, in seinem Vortrage Gründlichkeit mit Faßlichkeit zu verbinden, und insbesondere die (den Anfänger oft abschreckende) Logarithmenlehre auf recht verständliche Weise zu entwickeln. Um die Rechnung mit diesen Zahlen zu erleichtern, sind die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000, nach dem Muster der Strauchischen Tafeln, der Schrift beygefügt worden.

Aschaffenburg, im December 1820.

Der Verfasser.

Erste Abtheilung.

Von den entgegengesetzten Zahlen.

§. 281. Erklärung. Die Natur der entgegengesetzten Größen geht am Einleuchtendsten aus ihrer Entstehung hervor. Diese Entstehung beruht auf der Möglichkeit, sich einem festgesetzten Ziele anzunähern, oder von ihm sich zu entfernen. Nimmt man z. B. in einer geraden Linie, welche von Norden nach Süden geht, einen willkührlichen Punct, so kann man sich durch gleiche Schritte in dieser Linie entweder dem gegen Norden oder dem gegen Süden liegenden Endpuncte annähren.

Man nennt hier die Schritte gegen Norden den Schritten nach Süden entgegengesetzt, so wie umgekehrt, die Schritte südwärts den Schritten nordwärts entgegengesetzt sind. Hieraus erkennt man, daß, wenn das Ziel in Norden ist, die Schritte nach Süden von diesem Ziele abführen; wäre aber das Ziel in Süden, so würden die Schritte gegen Norden von ihm abführen. Daher sind entgegengesetzte Größen überhaupt solche, welche einem festgesetzten Ziele entweder entsprechen oder von demselben abführen. Vermögen und Schulden; Hinaufsteigen und Hinabsteigen; Vermehren und Vermindern, u. dgl. m. sind also, nach diesem Begriffe, ebenfalls entgegengesetzte Größen.

entgegengesetzte Zahlen wirkliche Größen sind, und daß ihr Gegensatz nur aus jenem Ziele entspringt, zu dessen Erreichung sie entweder förderlich oder hinderlich wirken. Weil Bejahen und Verneinen ebenfalls von entgegengesetzter Art und allgemeine Ausdrücke sind, um die Annäherung zum Ziele, oder die Entfernung von demselben zu bezeichnen, so hat man von den beyden entgegengesetzten Zahlen eine die positive oder bejahende, die andere aber die negative oder die verneinende genannt. So sind die Schritte nach Norden positiv, wenn die Schritte nach Süden negativ sind; aber auch die Schritte nach Süden können positiv heißen, wo alsdann jene nach Norden die negativen sind. Beyde Schritte sind etwas wirkliches und heißen nur in soferne positive oder negative, als man durch sie dem Ziele näher rückt, oder sich mehr von ihm entfernt.

§. 283. Willkührlicher Satz. Da die Addition und die Subtraction entgegengesetzte arithmetische Operationen sind, und die Addition in Bezug auf die Bildung der Zahl einen positiven, die Subtraction aber einen negativen Character hat, so hat man die Zeichen dieser Rechnungsarten, nämlich + und —, zur Bezeichnung der positiven und negativen Größen gewählt. Wollte man sich z. B. von dem oben angenommenen Puncte gegen Norden bewegen, so stellte + 6 eine Menge von 6 gegen Norden gerichteten Schritte dar, — 4 aber würde eine Menge von 4 Schritten südwärts bedeuten, u. s. w. Wenn man vor eine Ziffer keines dieser beyden Zeichen setzt, so versteht man immer die positive Bedeutung darunter.

entgegengesetzte Zahlen in ein Ganzes zusammensetzt, so heben sie sich auf, und sind, in Bezug auf das zu erreichende Ziel = 0. So ist z. B. + 5 — 5 = 0. Denn + 5 stellt 5 Schritte nordwärts, — 5 aber 5 Schritte südwärts vor. Wer nun von einem festgesetzten Puncte durch 5 gleiche Schritte nach Norden und von hier an wieder durch 5 eben so große Schritte nach Süden geht, hat zwar an sich selbst 10 Schritte gemacht; aber seine Bewegung ist, in Bezug auf die Annäherung gegen Norden, = 0. Hieraus sieht man deutlich, daß das Positive, gleich dem Negativen, etwas Wirkliches, und jenes diesem nur in Bezug auf ein bestimmtes Ziel entgegengesetzt sey.

II. Wenn ungleiche entgegengesetzte Zahlen zusammengesetzt werden, so wird ein Theil der größern durch die kleinere aufgehoben, und der Ueberrest ist von der Art der größern. So ist z. B. + 12 — 7 = + 5. denn wenn + 12 die zwölf Schritte nach Norden bedeutet, so stellt — 7 die sieben Schritte südwärts vor, wodurch man, in Bezug auf die Annäherung nach Norden, um 5 Schritte dem Ziele näher gekommen ist. Auch könnte man sagen, + 12 — 7 = + 7 + 5 — 7, welches, da + 7 — 7 = 0, offenbar = + 5 ist.

§. 285. Zusatz. Aus den bisherigen Bestimmungen geht hervor, daß sich die entgegengesetzten Zahlen von den Zahlen der gewöhnlichen Arithmetik darin unterscheiden, daß bey jenen die Bestimmung beachtet wird, ob sie einem festgesetzten Ziele entsprechend oder hinderlich sind. Da aber entgegengesetzte Zahlen, dieser besondern Bestimmung ungeachtet, die Natur der Zahlen überhaupt haben, so muß es auch bey ihnen, die

vier Hauptrechnungsarten geben, deren Regeln nunmehr zu entwickeln sind.

§. 286. Aufgabe. Die Addition in entgegengesetzten Zahlen zu verrichten.

Auflösung. Man addire von den gegebenen Zahlen alle positive und alle negative. Wenn beyde Summen gleich sind, so ist die Hauptsumme = 0; sind sie aber ungleich, so nehme man die kleinere von der größern hinweg, und gebe dem Reste das Zeichen der größern. Dieser Rest ist nun die verlangte Summe.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung gründet sich theils auf den allgemeinen Begriff der Addition, theils aber auf die sich gegenseitig zerstörende Eigenschaft entgegengesetzter Zahlen.

Beyspiele.

I. $+7+4-8+12-9+6-20+5$
$-3 = +7+4+12+6+5-8-9-20$
$-3 = +34-40 = -6.$

II. $+8-12-14+7-3$
$-9+10-3-7+12$ } zu addiren.

$-1-2-17 \quad 0+9$ Summe.

§. 287. Anmerkung. Das erste Beyspiel des vorigen §. könnte man auch so berechnen, daß man sagte: $+7$ und $+4$ gibt $+11$, dazu -8 gibt $+3$, dazu $+12$ gibt $+15$, u. s. w.

Im zweyten Beyspiele könnte man auch sagen:
$+8-12-14+7-3 = -14$
$-9+10-3-7+12 = +3$, folglich ist:
$-1-2-17\ 0+9 = -11 = -14+3$

§. 288. Lehrsatz. Die Subtraction einer gegebenen positiven Zahl ist der Addition der ihr gleichen

negativen; die Subtraction einer negativen Zahl aber der Addition der ihr gleichen positiven Zahl gleich.

Beweis. I. Wenn man eine positive Zahl abzieht, so wird jene, wovon der Abzug geschieht, um so viele Einheiten vermindert, als wie viele die abgezogene Zahl enthält. Addirt man aber die ihr gleiche negative Zahl, so werden hierdurch eben so viele Einheiten in der andern aufgehoben; folglich ist Beydes einerley. Ob man z. B. von 15 die Zahl + 10 abzieht, oder ob man zu 12 die Zahl — 10 addirt, ist einerley, da in beyden Fällen + 5 das Resultat ist.

II. Aus gleichen Gründen muß auch der Abzug einer negativen Zahl der Addition einer ihr gleichen positiven entsprechen; denn da das Abziehen selbst eine negative Operation ist, so wird durch den Abzug des Negativen das Negative selbst wiederum negirt, woraus etwas Positives entsteht. So heißt z. B. — 4 abziehen, soviel als 4 negative Einheiten wegnehmen, was nur durch das Setzen von + 4 geschehen kann.

Beyspiele.

I. $(+12) - (+7) = +12 - 7 = +5.$

II. $(+15) - (-10) = +15 + 10 = +25$ u. s. w.

§. 289. Aufgabe. Die Subtraction in entgegengesetzten Zahlen zu verrichten.

Auflösung. Man verwandle in der abzuziehenden Größe jedes Zeichen in das ihm entgegengesetzte, und addire nach dieser Verwandlung wie gewöhnlich, so ist die hieraus entstehende Summe die gesuchte Differenz.

Beweis. Da die abzuziehenden Zahlen entweder positive oder negative sind, das Abziehen des Positiven aber ein Setzen des ihm gleichen Negativen, die Sub-

Positiven ist, so folgt die Richtigkeit der Auflösung aus dem vorigen §.

Beyspiele.

I. + 8 − 15 − 12 − 9 − 5 + 7 größere Zahl
+ 6 − 4 + 9 − 12 + 20 − 5 kleinere Zahl
− + − + − + Veränd. der Zeichen

+ 2 − 11 − 21 + 3 − 25 + 12

II. − 4 + 1 − 5 − 10 − 8 + 6 − 3
− 9 − 8 − 15 + 7 − 9 + 13 − 8 + 6
+ + + − + − + −

+ 5 + 9 + 10 − 17 + 1 − 7 + 5 − 6

§. 290. Zusatz. I. Hieraus erhellt auch, daß man durch die Begriffe von den entgegengesetzten Zahlen im Stande ist, das Größere vom Kleinern abzuziehen; so ist z. B. (+6) − (+11) = +6 − 11 = −5. Oder (−7) − (−15) = −7 + 15 = +8.

II. Gewöhnlich sagt man: negative Größen seyen weniger als nichts, weil sie erst dann = 0 werden, wenn man die ihnen gleichen positiven hinzusetzt. Man sieht indessen, daß dieser Ausdruck nur metaphorisch gebraucht werden darf, weil negative Größen, ihrem wahren Begriffe nach, wirkliche Größen, und somit weder Nichts, noch weniger aber weniger als Nichts seyn können.

§. 291. Anmerkung. Auch kann man über die Subtraction in entgegengesetzten Zahlen dadurch die Probe machen, daß man sowohl die abzuziehende Zahl, als auch jene, wovon der Abzug geschehen soll, auf eine einzige reducirt, letztere von einander subtrahirt und nun zusieht, ob der entstandene Rest dem ebenfalls reducirten vorigen Reste gleich ist, z. B.

$$+9 + 4 - 6 + 12 - 3 = +16$$
$$- \quad - \quad + \quad - \quad + \quad -$$
$$-2 - 12 + 3 - 17 + 9 = -19.$$

§. 292. **Anmerkung.** Um die folgenden Regel für die Multiplication in entgegengesetzten Zahlen gehörig zu verstehen, bemerke man, daß das Positive, seiner Bedeutung nach, eine Bejahung, das Negative aber eine Verneinung ausdrückt. Es wird demnach bey der Multiplication dieser Zahlen nicht sowohl auf die Größe des Productes sondern auch darauf ankommen, ob dasselbe in einem positiven oder im negativen Sinne zu nehmen ist. Hierzu dienen folgende Hülfssätze.

§. 293. **Lehrsatz.** Zwey positive Factoren geben ein positives Product.

Beweis. Da positive Zahlen Bejahungen ausdrücken, so wird durch die Multiplication eines positiven Multiplicanden mit einem positiven Multiplicator die Bejahung des ersten durch den zweyten ebenfalls bejaht, woraus nothwendig ein bejahendes Resultat entspringen muß. So ist z. B. $+6 \times +4 = +24$. Denn $+6$ mit $+4$ multipliciren heißt, die $+6$ viermal in dem Sinne nehmen, worin sie selbst genommen ist; d. h. das Product 24 muß eben diese positive Bedeutung haben.

§. 294. **Lehrsatz.** Zwey negative Factoren geben ein positives Product.

Beweis. Da das Negative eine Verneinung ausdrückt, so ist die Multiplication einer negativen Zahl durch eine negative nichts anders, als die Verneinung einer Verneinung, d. h. eine Bejahung. So wird z. B. $-6 \times -4 = +24$. Denn -6 soll hier — viermal d. h. — 6 soll viermal im entgegengesetzten Sinne genommen werden, woraus offenbar $+24$ hervorgeht.

§. 295. **Lehrsatz.** Ein positiver Multiplicand

Positiven ist, so folgt die Richtigkeit der Auflösung aus dem vorigen §.

Beyspiele.

I. $+8-15-12-9-5+7$ größere Zahl
$+6-4+9-12+20-5$ kleinere Zahl
$-+-+-+$ Veränd. der Zeichen
$+2-11-21+3-25+12$

II. $-4+1-5-10-8+6-3$
$-9-8-15+7-9+13-8+6$
$+++-+-+-$
$+5+9+10-17+1-7+5-6$

§. 290. Zusatz. I. Hieraus erhellt auch, daß man durch die Begriffe von den entgegengesetzten Zahlen im Stande ist, das Größere vom Kleinern abzuziehen; so ist z. B. $(+6)-(+11)=+6-11=-5$. Oder $(-7)-(-15)=-7+15=+8$.

II. Gewöhnlich sagt man: negative Größen seyen weniger als nichts, weil sie erst dann $=0$ werden, wenn man die ihnen gleichen positiven hinzusetzt. Man sieht indessen, daß dieser Ausdruck nur metaphorisch gebraucht werden darf, weil negative Größen, ihrem wahren Begriffe nach, wirkliche Größen, und somit weder Nichts, noch weniger aber weniger als Nichts seyn können.

§. 291. Anmerkung. Auch kann man über die Subtraction in entgegengesetzten Zahlen dadurch die Probe machen, daß man sowohl die abzuziehende Zahl, als auch jene, wovon der Abzug geschehen soll, auf eine einzige reducirt, letztere von einander subtrahirt und nun zusieht, ob der entstandene Rest dem ebenfalls reducirten vorigen Reste gleich ist, z. B.

$$+9 \quad +4 \quad -6 \quad +12 \quad -3 = +16$$
$$- \quad - \quad + \quad - \quad + \quad -$$
$$-2 \quad -12 \quad +3 \quad -17 \quad +9 = -19.$$

§. 292. Anmerkung. Um die folgenden Regel für die Multiplication in entgegengesetzten Zahlen gehörig zu verstehen, bemerke man, daß das Positive, seiner Bedeutung nach, eine Bejahung, das Negative aber eine Verneinung ausdrückt. Es wird demnach bey der Multiplication dieser Zahlen nicht sowohl auf die Größe des Productes sondern auch darauf ankommen, ob dasselbe in einem positiven oder im negativen Sinne zu nehmen ist. Hierzu dienen folgende Hülfssätze.

§. 293. Lehrsatz. Zwey positive Factoren geben ein positives Product.

Beweis. Da positive Zahlen Bejahungen ausdrücken, so wird durch die Multiplication eines positiven Multiplicanden mit einem positiven Multiplicator die Bejahung des ersten durch den zweyten ebenfalls bejaht, woraus nothwendig ein bejahendes Resultat entspringen muß. So ist z. B. $+6 \times +4 = +24$. Denn $+6$ mit $+4$ multipliciren heißt, die $+6$ viermal in dem Sinne nehmen, worin sie selbst genommen ist; d. h. das Product 24 muß eben diese positive Bedeutung haben.

§. 294. Lehrsatz. Zwey negative Factoren geben ein positives Product.

Beweis. Da das Negative eine Verneinung ausdrückt, so ist die Multiplication einer negativen Zahl durch eine negative nichts anders, als die Verneinung einer Verneinung, d. h. eine Bejahung. So wird z. B. $-6 \times -4 = +24$. Denn -6 soll hier — viermal d. h. — 6 soll viermal im entgegengesetzten Sinne genommen werden, woraus offenbar $+24$ hervorgeht.

§. 295. Lehrsatz. Ein positiver Multiplicand

und ein negativer Multiplicator erzeugen ein negatives Product.

Beweis. Wenn der Multiplicand positiv, der Multiplicator aber negativ ist, so heißt die Multiplication so viel, als das Positive im negativen Sinne nehmen, oder die Bejahung verneinen, wodurch etwas Verneinendes oder Negatives entsteht. So ist $+6 \times -4 = -24$. Denn hier soll die $+6$ viermal negativ, d. h. viermal verneinend genommen werden, welches offenbar 24 negative Einheiten hervorbringen muß.

§. 296. Lehrsatz. Ein negativer Multiplicand und ein positiver Multiplicator erzeugen ein negatives Produt.

Beweis. Den negativen Multiplicanden mit dem positiven Multiplicator multipliciren, heißt so viel, als das Verneinende im bejahenden Sinne nehmen, oder die Verneinung wirklich verneinen, was wiederum ein verneinendes oder negatives Resultat gibt. So ist z. B. $-6 \times +4 = -24$. Denn die 6 negative Einheiten des Mulizplicanden sollen hier wirklich viermal zu sich selbst gesetzt werden, woraus offenbar 24 negative Einheiten entstehen.

§. 297. Zusatz. Aus den vier zunächst vorher gehenden §§. ergibt sich nunmehr folgender Hauptsatz:

Wenn die beyden Factoren gleichartige Zeichen haben, so wird das Product positiv; haben sie aber ungleichartige Zeichen, so wird das Product negativ.

§. 298. Aufgabe. Die Multiplication in entgegengesetzten Zahlen zu verrichten.

Auflösung. Nachdem man den Multiplicanden, unter denselben den Multiplicator gesetzt, und einen Ab-

sönderungsstrich gezogen hat, multiplicire man jedes einzelne Glied des Multiplicators mit jedem einzelnen Gliede des Multiplicanden und beobachte in Rücksicht der Zeichen die Regel des vorigen §.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung ergibt sich unmittelbar aus den vorhergehenden §. §.

Beyspiele.

I. $-3+5-6-10+2$ Multiplicand
$-4+3$ Multiplicator

$+12-20+24+40-8$
$-9+15-18-30+6$ } Product.

II. $+7-3-5-10+8$
$-4+6-7$ } Factoren

$-28+12+20+40-32$
$+42-18-30-60+48$
$-49+21+35+70-56$ } Product

§. 299. Anmerkung. Ueber die Multiplication kann man dadurch eine Probe machen, daß jeder der beyden Factoren auf eine Zahl reducirt wird, welche beyde Zahlen sodann mit einander multiplicirt, dem reducirten Producte gleich seyn müßen. Z. B.

Multiplicand $+5-8+3-7 = -7$
Multiplicator $-6+9 = +3$

Product $\left\{\begin{matrix}-30+48-18+42\\+45-72+27-63\end{matrix}\right\} = -21$

§. 300. Anmerkung. Gleichwie die Multiplication, so beruht auch die Division in entgegengesetzten Zahlen auf den Regeln für die Zeichen des Quotienten, wenn die Zeichen des Dividenden und Divisors gegeben sind. Zu dieser Bestimmung dienen folgende vier Lehrsätze:

§. 301. Lehrsatz. Ein positiver Dividend und ein positiver Divisor gibt einen positiven Quotienten.

Division muß der Dividend einem Producte aus dem Divisor in den Quotienten gleich seyn. Wäre nun bey einem positiven Dividenden und bey einem positiven Divisor der Quotient nicht auch positiv, so müßte er negativ seyn, und das Product aus diesem negativen Quotienten in den positiven Divisor müßte den positiven Dividenden hervorbringen, was widersprechend ist, indem zwey Factoren von verschiedenen Zeichen ein negatives Product bilden. Daher ist z. B. $+20:+5=+4$; $+48:+16=+3$ u. s. w.

§. 302. Lehrsatz. Wenn der Dividend sowohl, als der Divisor negativ ist, so wird der Quotient positiv.

Beweis. Sollte in diesem Falle der Quotient nicht positiv seyn, so müßte er negativ werden, und das Product aus diesem negativen Quotienten in den negativen Divisor müßte den negativen Dividenden hervorbringen, was deßhalb unmöglich ist, weil nach dem Vorhergehenden zwey negative Factoren kein negatives, sondern ein positives Product bilden. So ist z. B. $-18:-6=+3$; $-24:-6=+4$ u. s. w.

§. 303. Lehrsatz. Wenn der Dividend positiv, der Divisor aber negativ ist, so wird der Quotient negativ.

Beweis. Sollte hier der Quotient nicht negativ seyn, so wäre er positiv, und das Product aus diesem positiven Quotienten in den negativen Divisor müßte den positiven Dividenden erzeugen, was nicht geschehen kann, weil zwey Factoren von verschiedenen Zeichen ein negatives Product geben. Demnach ist z. B. $+27:-9=-3$; $+36:-3=-12$, u. s. w.

mit einem positiven Divisor einen negativen Quotienten.

Beweis. Denn wenn dieser Quotient nicht negativ wäre, so müßte er positiv seyn, und ein Product aus ihm in den positiven Divisor müßte den negativen Dividenden erzeugen, was unmöglich ist, weil zwey positive Factoren auch ein positives Product geben. So ist z. B. $-12:+3=-4$; $-28:+4=-7$, u. s. w.

§. 305. Anmerkung. Man erkennt leicht, daß die Beweise der vier vorhergehenden §§. indirect sind, weil die Wahrheit des zu beweisenden Satzes jedesmal aus der Unmöglichkeit seines Gegentheils gefolgert wird. Es ist nicht schwer, und eine nützliche Uebung für Anfänger, die Beweise dieser Sätze auch auf eine directe Art, das heißt, aus der Natur der Sache selbst, zu führen.

§. 306. Zusatz. Für die Division gilt daher, in Hinsicht der Zeichen, folgende Hauptregel:

Wenn der Dividend und der Divisor einerley Zeichen haben, so wird der Quotient positiv; haben sie aber verschiedene Zeichen, so wird der Quotient negativ.

§. 307. Aufgabe. Die Division in entgegengesetzten Zahlen zu verrichten.

Auflösung. Man dividire mit den Gliedern des Divisors auf gewöhnliche Weise in die Glieder des Dividenden und beobachte in Hinsicht der Zeichen die Regel des vorigen §.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens leuchtet aus dem Vorhergehenden von selbst ein.

Div.	Dividend	Quotient
I. — 4	— 12 + 20 — 48 — 60 + 36	+ 3 — 5 + 12 + 15 — 9

II. $\frac{-18+12-6}{-3} = +6-4+2$

Div.	Dividend	Quotient.
III. + 5	— 20 — 60 + 3 — 100 — 2	— 4 — 12 + $\frac{3}{5}$ — 20 — $\frac{2}{5}$.

Divis.	Dividend	Quotient
IV. — 3 + 2	+ 12 — 21 — 36 — 8 + 14 + 24	— 4 + 7 + 12

	+ 12	— 8
	— 21	— 36 + 14 + 24
	— 21	+ 14
		— 36 + 24
		— 36 + 24
		0 0

§. 308. Anmerkung. Eine ähnliche Probe, wie oben bey der Multiplication erwähnt worden ist, kann auch hier bey der Division angestellt werden. Wenn man nämlich mit dem auf eine Zahl reducirten Divisor in den auf eine Zahl reducirten Dividenden dividirt, so muß der auf eine Zahl zurückgeführte Quotient herauskommen. So ist z. B. in dem letzten Exempel des vorigen §. der Divisor $= -3 - 2 = -1$, der Dividend aber $= 12 - 21 - 36 - 8 + 14 + 24 = +12 + 14 + 24 - 21 - 36 - 8 = +50 - 65 = -15$, und der Quotient $= -4 + 7 + 12 = +15$. In der That ist nun auch $\frac{-15}{-1} = +15$.

§. 309. Anmerkung. Da durch den Vortrag der seither entwickelten Lehren alle Hauptfälle, welche bey der Rechnung in entgegengesetzten Zahlen vorkommen können, dargelegt worden sind, so bleibt nichts übrig, als daß sich die Anfänger die nöthige Fertigkeit in ihrer Anwendung erwerben, weil auch diese Lehre zugleich der Grund ist, worauf die so wichtige Buchstaben-Rechnung beruht.

Zweyte Abtheilung.

Von der Buchstabenrechnung.

§. 310. Erklärung. Die gewöhnliche Arithmetik rechnet mit Ziffern, d. h. mit einzelnen Zahlen. So kann z. B. die Ziffer 8 keine andere Menge von gleichartigen Einheiten vorstellen, als acht. Demnach liefert auch die gewöhnliche Arithmetik keine allgemeine, sondern nur individuelle Resultate. Das Streben des Geistes ist aber darauf gerichtet, sich vom Einzelnen zum Allgemeinen zu erheben und solche Gesetze aufzufinden, welche eine unzählige Menge einzelner Fälle unter sich begreifen. Diesem Streben dankt auch die Buchstabenrechnung ihre Entstehung, und die Mittel, demselben zu entsprechen, sind die Buchstaben, als allgemeine Bezeichnungen der Zahlen. So stellt z. B. der Buchstabe a irgend eine beliebige Zahl im Allgemeinen dar; der Buchstabe b aber bezeichnet eine andere von a verschiedene Zahl. Der Ausdruck — c bedeutet irgend eine negative Zahl, u. s. w. Die Buchstaben sind demnach schicklich gewählte allgemeine Zahlzeichen. Ihre Bedeutung kann sich aber noch weiter erstreken; sie können z. B. Linien, Flächen, Körper, Kräfte, u. s. w. darstellen.

§. 311. Erklärung. Die Buchstabenrechnung ist daher jener Theil der Arithmetik, welcher sich

arithmetische Wahrheiten aufzufinden. Wie dieses auf verschiedene Art bewerkstelligt werden könne, muß die weitere Ausführung dieser Lehre zeigen.

§. 312. Zusatz. I. Hieraus folgt, daß $a + b$ der allgemeine Ausdruck einer Summe von irgend zwey positiven Zahlen ist. Man hätte auch, statt dessen, $c + d$, oder $m + n$, oder $p + q$ setzen können. Deßgleichen drückt $- a - b$ die Summe irgend zweyer negativen Zahlen aus. Auch stellt $a + b + c$ die Summe dreyer positiven Zahlen dar, u. s. w.

II. Unter dem Ausdrucke $a - b$ kann man sich jede Differenz von irgend zwey positiven Zahlen vorstellen. Eben dieses bedeuten die Ausdrücke $c - d$, $m - n$, $p - q$ u. s. w.

III. Der allgemeine Ausdruck eines aus zwey Factoren bestehenden Productes ist $a \times b$, oder auch $a . b$, oder auch $a\,b$. Deßgleichen bedeutet $a \times b \times c$ ein aus drey Factoren bestehendes Product, u. s. w.

IV. Der Ausdruck $a : b$ oder auch $\frac{a}{b}$ stellt jede Division im Allgemeinen dar, worin a Dividend und b Divisor ist. Eben so stellt auch $\frac{m}{n}$ jeden Bruch im Allgemeinen vor.

§. 313. Erklärung. I. Wenn ein und der nämliche Buchstabe, oder eine gleiche Verbindung der nämlichen Buchstabengrößen mehrmal mit einerley Zeichen vorkommen, so läßt sich eine bequeme Abkürzung dieser Buchstabenausdrücke anwenden. So ist. z. B. $a + a + a + a + a = 5a$; $b - b - b - b = -3b$; $ab + ab + ab + ab = 4ab$, u. s. w. Diese Ziffer, welche

staben setzt, werden die Coefficienten genannt.

II. Wenn einerley Buchstabe mehrmal als Factor gesetzt wird, so entsteht ebenfalls eine Abkürzung des Ausdrucks. Anstatt $a \times a$ schreibt man a^2; anstatt $a \times a \times a$ wird gesetzt a^3, und $b \times b \times b \times b = b^4$. Diese kleine Ziffer, welche sich rechts oben neben dem Buchstaben befindet, wird Exponent genannt. Exponenten sind daher Ziffer, welche ausdrücken, wie oft ein Buchstabe als Factor in dem Producte aus lauter gleichen Factoren vorkömmt. Man nennt a^2 das Quadrat oder die zweyte Potenz von a; so wie a^3 der Würfel, oder die dritte Potenz von a genennt wird. Auch heißt a in Bezug auf a^2 die Quadratwurzel, in Bezug auf a^3 die Cubikwurzel. Das Zeichen $\sqrt{}$ bedeutet die Wurzelausziehung. So ist $\sqrt[2]{16} = 4$, weil $4 \times 4 = 16$; ferner $\sqrt[3]{27} = 3$, weil $3 \times 3 \times 3 = 27$. Potenz überhaupt ist also das Product aus lauter gleichen Factoren. Die Menge dieser Factoren heißt der Grad der Potenz. Das Quadrat ist also vom zweyten Grade, der Würfel vom dritten Grade, u. s. w.

III. Auch gehört hieher der Gebrauch der Parenthese. So heißt z. B. $(a + b - c) \times d$ soviel, als die Summe von a und b, weniger c soll mit d multiplicirt werden, welches auch soviel als $ad + bd - cd$ ist. Deßgleichen bedeutet $(2a - b) \times (m - n)$ soviel, als $2a$ weniger b soll mit m weniger n multiplicirt werden, u. s. w.

§. 314. Anmerkung. Da die Buchstaben die Stelle der Zahlen vertreten, in Zahlen aber vier Hauptrechnungsarten möglich sind, so müßen auch diese vier Grundrechnungen in Buchstaben Statt finden.

§. 315. Aufgabe. Die Addition in Buchstabengrößen zu verrichten.

Auflösung. I. Wenn die gegebenen Buchstaben verschieden sind, so setze man sie nach alphabetischer Ordnung mit ihren Zeichen und etwaigen Coefficienten und Exponenten neben einander.

II. Kommen aber einerley Buchstaben oder die nämlichen Verbindungen von Buchstaben mehrmals vor, so beobachte man in Rücksicht ihrer Coefficienten die oben gegebenen Regeln der Addition entgegengesetzter Zahlen, und setze, wenn die Summe dieser Coefficienten nicht $= 0$ wird, die Buchstabengröße einmal dazu. Die nachfolgenden Beyspiele werden dieses erläutern.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht theils auf der Lehre von entgegengesetzten Zahlen, theils aber auf der Bedeutung der Coefficienten.

Beyspiele.

I. Man soll die Größen $3a, b, -3c, d$ und $-f$ addiren, so ist ihre Summe $= 3a + b - 3c + d - f$.

II. Es soll addirt werden: a und $\frac{m}{n}$ und $3b$ und $-d$, so ist die Summe $= a + 3b - d + \frac{m}{n}$.

III. Zu $3a - b + 3g - d + 2f$ sollte addirt werden $+ 5b - 2a - 5f - g + 3d$, so ordne man zuerst diese Größen alphabetisch nämlich:

$3a - b - d + 2f + 3g.$
$-2a + 5b + 3d - 5f - g$ nun reducire man, so ist
$a + 4b + 2d - 3f + 2g$ die Summe.

IV. $\left.\begin{array}{r} 2a - 3b + 2d - g \\ -5a + 4b + 2d + 2g \\ 4a - b + d \\ -2a + 2b - 2d - h \end{array}\right\}$ zu addiren

$\overline{-a + 2b + 3d + g - h}$ Summe.

V. $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b - 6c \\ -a - 5b \end{array}\right\}$ zu addiren

$\overline{2a - 3b - 6c}$ Summe.

§. 316. Anmerkung. Zur Erläuterung und Probe der Addition in Buchstaben kann man denselben bestimmte Zahlenwerthe geben. Nennt man z. B. im letzten Exempel a Gulden, b Kreuzer, und c Pfennige, so wäre $3a + 2b - 6c = 3$ fl. $+ 2$ kr. $- 6$ Pf. $= +722$ Pf.; ferner wäre $-a - 5b = -260$ Pf., folglich die Summe $= 722 - 260 = 462$ Pf. Nun ist aber auch $2a - 3b - 6c = 2$ fl. $- 3$ kr. $- 6$ Pf. $= 462$ Pf. wie vorhin.

§. 317. Aufgabe. Die Subtraction in Buchstaben zu verrichten.

Auflösung. I. Wenn die abzuziehende Größe keine Buchstaben mit jener gemein hat, wovon der Abzug geschehen soll, so verändere man in jener alle Zeichen in die entgegengesetzten, und ordne nun alle Buchstabengrößen alphabetisch.

II. Befinden sich aber in beyden Größen gemeinschaftliche Buchstabenausdrücke, so ordne man zuerst beyde alphabetisch, setze die abzuziehende unter die andere, verändere in jener die Zeichen, und addire nun beyde zusammen, so ist diese Summe die gesuchte Differenz.

Beweis. Diese Auflösung beruht theils auf der Bedeutung der Coefficienten, theils auf den in der vorigen Abtheilung erwiesenen Sätzen von der Subtraction entgegengesetzter Zahlen.

Beyspiele.

I. Von $a + 3b - d$ soll man abziehen $- m + c - g$, so ist $(a + 3b - d) - (- m + c - g) = (a + 3b - d) + (m - c + g) = a + 3b - c - d + m + g$ die richtige Differenz.

II. Von $- g + 3f + 4a$ soll man abziehen $- 2b + 3d - c + h$, so ist $(- g + 3f + 4a) - (- 2b + 3d - c + h) = (- g + 3f + 4a) + (+ 2b - 3d + c - h) = 4a + 2b + c - 3d + 3f - g - h$.

III. Von $3b - 4c + 5a - d + 2g$ soll abgezogen werden $- 3g + 2a - 4b + d - 3c + f$, so ist die Rechnung diese

$$\left.\begin{array}{l} + 5a + 3b - 4c - d + 2g \\ + 2a - 4b - 3c + d - 3g + f \end{array}\right] \text{geordnet}$$

$$\begin{array}{cccc} - & + & + & - \\ \hline + 3a & + 7b & - c & - 2d + 5g - f \end{array} \quad \text{Veränd. der Zeich.}$$

Differenz.

IV. Von $12a - 8b - 7c - 4d + g$ soll man abziehen $15a - 8b - 9c - 6d$. Dies gibt:

$$\begin{array}{l} 12a - 8b + 7c - 4d + g \\ 15a - 8b - 9c - 6d \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} - & + & + & + \\ \hline - 3a & 0 & + 16c & + 2d + g \end{array} \quad \text{Unterschied.}$$

§. 318. Aufgabe. Potenzen, deren Wurzeln durch Buchstaben ausgedrückt sind, mit einander zu multipliciren.

Auflösung. I. Wenn die Potenzen verschiedene Wurzeln haben, so kann man ihre Multiplication nur andeuten, welches dadurch geschieht, daß man sie alphabetisch ordnet und mit dem Multiplicationszeichen verbindet.

II. Haben aber die gegebenen Potenzen einerley Wurzeln, so setze man diese Wurzel einmal mit einem Exponenten, welcher der Summe der gegebenen Exponenten der Factoren gleich ist.

Beweis. Die Richtigkeit des ersten Falles ist von selbst einleuchtend, jene des zweyten aber folgt aus der Bedeutung der Exponenten, und nachfolgende Beyspiele werden zur Erläuterung dienen.

Beyspiele.

I. $a^2 \times b^3 = a^2 b^3$; $a^2 \times b^2 \times c^3 = a^2 b^2 c^3$; $a^n \times b^m = a^n b^m$ u. s. w.

II. $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$. Denn $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5$; $b^3 \times b4 = b7$; $d^n \times d^m = d^{n+m}$, u. s. w.

Aufänger werden wohl thun, wenn sie statt dieser Buchstaben wirkliche Zahlen setzen und die Rechnung in diesen durchführen.

§. 319. Aufgabe. Man soll eine gegebene Potenz auf eine neue Potenz erheben.

Auflösung. Man gebe der Wurzel einen Exponenten, welcher dem Producte der beyden gegebenen Exponenten gleich ist. Beweis und Erläuterung. $(a^2)^3 = a^{2*3} = a^6$. Denn $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2*3} = a^6$. Ganz allgemein ist $(a^n)^m = a^{mn}$, u. s. w.

Auch diesen Satz wird die wirkliche Zifferrechnung erläutern.

§. 320. Aufgabe. Ein aus mehreren Factoren bestehendes Product auf eine verlangte Potenz zu erheben.

Auflösung. Man erhebe jeden Factor dieses

Potenzen in einander.

Beweis und Erläuterung. $(ab)^3 = a^3 b^3$. Denn $(ab)^3 = ab \times ab \times ab, = aaabbb = a^3 b^3$. Ganz allgemein ist $(ab)^n = a^n b^n$.

Auch diesen Satz erläutere man in Zahlen.

§. 321. Aufgabe. Einen Bruch auf eine gegebene Potenz zu erheben.

Auflösung. Man erhebe Zähler und Nenner dieses Bruchs zur gegebenen Potenz, so ist die Aufgabe aufgelöst.

Beweis und Erläuterung. $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$.

Allgemein ist wiederum $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ u. s. w.

Auch darüber werden Zahlenbeyspiele zweckmäßige Erläuterung geben.

§. 322. Aufgabe. Die Multiplication in Buchstabengrößen zu verrichten.

Auflösung. Wenn der Multiplicand aus mehreren Buchstabengrößen, der Multiplicator aber nur aus einer besteht, so multiplicire man jedes einzelne Glied von jenem mit diesem; befinden sich unter diesen Factoren Glieder von einerley Buchstaben, so befolge man die Regeln von der Multiplication der Potenzen von einerley Wurzeln. Die Coefficienten der Factoren werden jedesmal multiplicirt und wegen der Zeichen die bekannten Regeln beobachtet.

II. Besteht aber jeder der beyden Factoren aus meh-

reren Buchstabengrößen, so ordne man beyde alphabetisch, schreibe sie unter einander, ziehe einen Strich, und multiplicire nun jedes einzelne Glied des Multiplicanden mit jedem einzelnen Gliede des Multiplicators, beobachte wegen der Zeichen, Coefficienten und Exponenten die bekannten Regeln und addire diese Theilfacta, so ist diese Summe das verlangte Product.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung ist theils durch sich selbst, theils durch die bewiesenen Vordersätze gerechtfertigt.

Beyspiele.

I. $a - b + 3d - m$ Multiplicand.
n Multiplicator

$an - bn + 3dn - mn$ Product

II. $2a - b + g - 2h$ } Factoren
$- 3a$ }

$-6a^2 + 3ab - 3ag + 6ah$ Factum.

III. $a^2 + 2b^2 - c - 4d$ } Factoren
$- 3b$ }

$-3a^2b - 6b^3 + 3bc - 12bd$ Product

IV. $a + b$ } Factoren
$a + b$ }

$a^2 + ab$ } Theilfacta
$+ ab + b^2$ }

$a^2 + 2ab + b^2$ Product.

V. $a - b$ } Factoren
$a - b$ }

$a^2 - ab$ } Theilfacta
$- ab + b^2$ }

$a^2 - 2ab + b^2$) Product.

$a - b$ } Factoren

$a^2 + ab$
$-ab - b^2$ } Theilfacta

$a^2 - b^2$ Product.

VII. $a + b - d$
$a - b - d$ } Factoren

$a^2 + ab - ad$
$-ab - b^2 + bd$
$-ad - bd + d^2$ } Theilfacta

$a^2 - 2ad - b^2 + d^2$ Product.

VIII. $5a - 2b - d$
$2a + 3b - 2d$ } Factoren

$10a^2 - 4ab - 2ad$
$15ab - 6b^2 - 3bd$
$-10ad + 4bd + 2d^2$ } Theilfacta

$10a^2 + 11ab - 12ad - 6b^2 + bd + 2d^2$ Product

IX. $a^2 - 3b^2 + 2c - d$
$3a + 2b^3 - c^2$

$3a^3 - 9ab^2 + 6ac - 3ad$
$2a^2b^3 - 6b^5 + 4b^3c - 2b^3d$
$-a^2c^2 + 3b^2c^2 - 2c^3 + c^2d$

$3a^3 - 9ab^2 + 2a^2b^3 + 6ac - a^2c^2 - 3ad - 6b^5$
$+ 4b^3c + 3b^2c - 2b^3d - 2c^3 + c^2d.$

X. $6a^n - 2b^m$
$4a^n + 3b^n$

$24a^{2n} - 8a^n b^m + 18a^n b^n - 6b^{m+n}.$

§. 323. Zusatz. Zur Erläuterung dessen, was bisher von der Anwendung der Buchstabenrechnung auf

ist, kann folgendes Beyspiel, das sechste des vorigen §., dienen. Der eine Factor a + b stellte hier die Summe zweyer Zahlen, der andere Factor a — b aber die Differenz eben dieser Zahlen vor. Das Product gab $a^2 - b^2$, d. h. den Unterschied der Quadrate dieser Zahlen. Da man sich nun unter a und b *irgend zwey beliebige Zahlen* vorstellen kann, so ist durch dieses Beyspiel der folgende lehrreiche und allgemein gültige Satz bewiesen:

Wenn man die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt, so gibt das Product die Differenz der Quadrate dieser Zahlen.

Anfänger werden wohl thun, diesen Satz durch Zahlenbeyspiele zu erläutern.

§. 324. *Aufgabe.* Potenzen, deren Wurzeln Buchstabengrößen sind, durch einander zu dividiren.

Auflösung. I. Wenn die Wurzeln verschieden sind, so läßt sich die wirkliche Division nicht ausführen, sondern nur andeuten.

II. Haben aber die Potenzen einerley Wurzeln, so setze man diese Wurzel einmal und gebe ihr einen Exponenten, welchen man findet, wenn man den Exponenten des Divisors von jenem des Dividenden abzieht.

Beweis. Die Richtigkeit der ersten Regel ist von selbst, jene der zweyten aus der Bedeutung der Exponenten klar, wie folgende Beyspiele erläutern werden.

Beyspiele.

I. Wenn a^2 durch b^2 dividirt werden soll, so ist der

b^m dividirt den Quotienten $a^n : b^m = \frac{a^n}{b^m}$.

II. Hier ist $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$. Denn $a^5 : a^3 = aaaaa : aaa = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$. Allgemein ist $a^m : a^n = a^{m-n}$.

§. 325. Lehrsatz. Jede Größe auf der Nullpotenz ist der Einheit gleich.

Beweis. $a^n : a^n = a^{n-n} = a^o$. Allein $a^n : a^n = 1$, da jede Größe in sich selbst einmal enthalten ist. Daher muß auch $a^o = 1$ seyn. Auf gleiche Weise ist $6^o = 1$; $48^o = 1$; $6095^o = 1$, u. s. w.

§. 326. Lehrsatz. Größen mit negativen Exponenten sind ächten Brüchen gleich, deren Zähler 1 und deren Nenner eben diese Größen mit gleichen positiven Exponenten sind. Oder allgemein $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Beweis. Nach dem Vorhergehenden ist $a^m : a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n}$ Allein es ist auch $a^m : a^{m+n} = \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m \times a^n} = \frac{1}{a^n}$. Folglich muß auch $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ seyn.

Beyspiele.

Nach diesem ist also $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$; $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$; $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$ u. s. w.

§. 327. Zusatz. Da $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$,

$1; 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01; 10^{-3} = \frac{1}{10^3} =$

$\frac{1}{1000} = 0,001; 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001,$

u. s. w., so kann jede gemischte Zahl, welche aus Ganzen und aus Decimalbrüchen besteht, durch Ziffer ausgedrückt werden, welche alle in Potenzen von 10 multiplicirt sind. So ist z. B. $7345,8296 = 7 \times 10^{+3} + 3 \times 10^{+2} + 4 \times 10^{+1} + 5 \times 10^{0} + 8 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3} + 6 \times 10^{-4}$.

§. 328. Lehrsatz. Größen mit Bruchexponenten sind Wurzelgrößen, bey welchen des Exponenten Nenner den Grad der Wurzel, dessen Zähler dagegen den Grad der Potenz der gegebenen Größe bezeichnet, oder $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Beweis. $a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$. Allein $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$. Denn $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a^{\frac{m}{m}} = a^1 = a$. Eben so ist auch $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$. Folglich ist auch $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$, und daher auch $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Beyspiele.

Demnach ist $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $b^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{b4}$; $c^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{c}$; $d^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{d}$; $256^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{256} = 4$, u. s. w.

§. 329. Anmerkung. Was solche Bruchgrößen für eine Bedeutung haben, deren Exponenten negative Brüche sind, wird der Anfänger, durch Beyhülfe der vorhergehenden Lehrsätze, für sich selbst auffinden.

auszuführen.

Auflösung. I. Wenn Dividend und Divisor keine gemeinschaftliche Buchstaben enthalten, so kann man die Division nicht wirklich ausführen, sondern nur bruchweise andeuten.

II. Besteht der Divisor aus einem Buchstaben, der auch in den Gliedern des Dividenden vorkömmt, so vergleiche man den Divisor mit jedem Gliede dieses Dividenden, bestimme nach den bekannten Regeln ihre Zeichen und setze jene Buchstaben und Coefficienten, welche dieses Glied mehr als der Divisor enthält in den Quotienten.

III. Haben Dividend und Divisor mehrere Glieder von zum Theil gleichen Buchstaben mit verschiedenen Zeichen, Coefficienten und Exponenten, so ordne man zuerst in beyden die Buchstaben alphabetisch, bestimme aus dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividenden den Quotienten, indem man die Zeichen nach bekannten Regeln setzt, mit dem etwaigen Coefficienten des Divisors in jenen des Dividenden dividirt, die gemeinschaftlichen Buchstaben von beyden im Quotienten wegläßt, und, wenn etwa Potenzen von gleichen Wurzeln zu dividiren sind, den obigen Vorschriften folgt.

IV. Mit dem (nach III.) jedesmal gefundenen Theile des Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor und subtrahire dieses Product von den gehörigen Theilen des Dividenden, bis entweder die Division sich schließt, oder am Ende ein Rest bleibt, den man in Form eines Bruchs zu schreiben pflegt.

Beweis. Die Richtigkeit der Auflösung beruht

bewiesenen Vordersätzen dieser Abtheilung.

Beyspiele.

I. Wenn $b - d + m$ durch $a + n$ dividirt werden soll, so läßt sich diese Division nur andeuten; nämlich $\frac{b - d + m}{a + n}$.

II.

Divis.	Dividend	Quotient
a	$2a + ab - 3ac + a$	$2 + b - 3c + 1$

III.

Divis.	Dividend	Quotient
$-b$	$ab - 2b^2 + bd - b^3 - d$	$-a + 2b - d + b^2 + \frac{d}{b}$

IV.

Divis.	Dividend	Quotient
$a + b$	$a^2 + 2ab + b^2$	$a + b$
	$a^2 + ab$	
	$ab + b^2$	
	$ab + b^2$	
	$0 \quad 0$	

V.

$a - b$	$a^2 - b^2$	$a + b$
	$a^2 - ab$	
	$+ ab - b^2$	
	$+ ab - b^2$	
	$0 \quad 0$	

VI.

$a + b - d$	$a^2 - 2ad - b^2 + d^2$	$a - b - d$
	$a^2 + ab - ad$	
	$- ab - ad - b^2$	
	$- ab - b^2 + bd$	
	$- ad - bd + d^2$	
	$- ad - bd + d^2$	
	$0 \quad 0 \quad 0$	

$10a^2 + 19ab - 10ad \quad | \quad 5a - 2b - d$

$-4ab - 2ad - 6b^2 + bd + 2d^2$

$-4ab \qquad -6b^2 + bd$

$-2ad - 3bd + 2d^2$

$-2ad - 3bd + 2d^2$

0 0 0

VIII. $a - b \mid a^3 - b^3 \mid a^2 + ab + b^2$

$a^3 - a^2 b$

$+a^2 b - b^3$

$a^2 b - ab^2$

$+ab^2 - b^3$

$ab^2 - b^3$

0 0

Dieses letztere Beyspiel gibt den allgemeinen Lehrsatz: Wenn man mit der Differenz zweyer Größen in die Differenz ihrer dritten Potenzen dividirt, so erhält man die zweyte Potenz der ersten Größe, ein Product aus der ersten in die zweyte und die zweyte Potenz der zweyten dieser Größen zum Quotienten. Beyspiele in Zahlen werden dieses erläutern. Ihre mehrfache Berechnung ist den Anfängern sehr zu empfehlen.

IX. $1 - 2x + x^2 \mid 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 \mid 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

$$\begin{array}{r}
1 - 2x + x^2 \\
\hline
-3x + 9x^2 - 10x^3 \\
-3x + 6x^2 - 3x^3 \\
\hline
3x^2 - 7x^3 + 5x^4 \\
3x^2 - 6x^3 + 3x^4 \\
\hline
-x^3 + 2x^4 - x^5 \\
-x^3 + 2x^4 - x^5 \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Zur Uebung dienen Folgende Beyspiele aus Maier's Algebra, 1810.

X. $24a^{2m} + 22a^m b^n + 4b^{2n} - 24a^m c + 8a^m - 6b^n c^3 - 8b^n c + 2b^n + 12c - 4c : 4a^m + b^n - 2c = 6a^m + 4b^n - 6c^3 + 2.$

XI. $35a^{2n-2} - 84a^{n-1} + 25a^{n-1} b - 60b + 20a^{n-x} c^{m-x} - 48c^{m-x} : 7a^{n-1} - 5b + 4c^{m-x} = 5a^{n-1} - 12.$

XII. $x^5 + 198x^2 - 10609x + 20394 : x^2 + 2x - 99 = x^3 - 2x^2 + 103x - 206.$

nen entspringen bisweilen unendliche Reihen, d. h. solche, welche nach einem bestimmten Gesetze ihrer Glieder fortschreiten und sich niemals genau abschließen. Folgende Beyspiele mögen diesen Begriff erläutern.

I. Man soll den Bruch $\frac{x}{x+1}$ in eine unendliche Reihe verwandeln. Hier ist

Divis.	Divid.	Quotient
$x+1$	x	$1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \ldots$

$$x+1$$

$$-1$$

$$-1-\frac{1}{x}$$

$$+\frac{1}{x}$$

$$+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$$

$$+\frac{1}{x^3}$$

$$+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}$$

$$-\frac{1}{x^4}$$ Rest.

von Gliedern, deren Gesetz man sogleich erkennt. Setzte man $x = 3$, so würde $\frac{x}{x+1} = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \ldots$

II. Der Bruch $\frac{1}{1+x}$ gibt folgende unendliche Reihe

$1 + x \mid 1 \quad \mid 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

$1 + x$

$- x$

$- x - x^2$

$+ x^2$

$+ x^2 + x^3$

$- x^3$

$- x^3 - x^4$

$+ x^4$

$+ x^4 + x^5$

$- x^5$ Rest.

Der vollständige Quotient ist aber für $\frac{1}{1+x} = 1 - (x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}$. Setzte man $x = 2$, so würde nun $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \frac{32}{3} = 21 - 10 - \frac{32}{3} = 11 - \frac{32}{3} = 11 - 10\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Dritte Abtheilung.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 332. Erklärung. Hier müßen einige, Oben bereits kürzlich erklärte Begriffe ausführlicher erörtert werden. Ein Product aus gleichen Factoren heißt eine Potenz oder Dignität eines dieser Factoren. Die Menge der vorhandenen Factoren wird der Grad der Potenz, und einer der Factoren die Wurzel der Potenz genennt. So ist z. B. $3 \times 3 \times 3 = 27$, und man sagt, 27 ist eine Potenz oder Dignität der 3. Weil nun in dem Producte 27 der Factor 3 dreymal vorkömmt, so ist 27 eine Potenz vom dritten Grade, und die Zahl 3 die Wurzel der Potenz 27. Ferner ist $256 = 4 \times 4 \times 4 \times 4$, folglich eine Potenz vom vierten Grade, deren Wurzel die Zahl 4 ist.

§. 333. Zusatz. Die Größe einer Potenz hängt daher sowohl von der Größe der Wurzel, als auch von dem Grade der Potenz selbst ab. Denn ein Product aus gleichen Factoren wird sowohl durch die Größe eines Factors, als auch durch die Menge derselben bestimmt.

§. 334. Willkührlicher Satz. Um den Grad einer Potenz zu bezeichnen, schreibt man eine kleine Ziffer oben an die Wurzel zur Rechten, welche bestimmt

kömmt. Diese kleine Ziffer heißt der Exponent der Potenz. So ist $8^3 = 8 \times 8 \times 8$ oder die dritte Potenz von 8. Desgleichen ist $6^5 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$; ferner $10^2 = 10 \times 10$ u. s. w. woraus man sieht, daß die Exponenten eigentlich nur eine Abkürzung der Schreibart bewirken.

§. 335. Erklärung. Ein Product aus einer Zahl in sich selbst, heißt das Quadrat dieser Zahl, und die Zahl, welche zweymal als Factor hierbey vorkömmt, wird die Quadratwurzel genennt. So ist $81 = 9 \times 9 = 9^2$ oder das Quadrat von 9, und 9 die Quadratwurzel von 81. Ferner ist 144 das Quadrat von 12, weil $12 \times 12 = 144$, und 12 ist die Quadratwurzel von 144. Daher sind die Ausdrücke: Quadrat und zweyte Potenz, so wie Quadratwurzel und Wurzel der zweyten Potenz vollkommen gleichbedeutend.

§. 336. Erklärung. Aus einer Zahl die Wurzel eines gewissen Grades ziehen, heißt, diese Zahl als eine Potenz von eben diesem Grade ansehen, und hieraus eine andere finden, welche so oft als Factor gesetzt, als es der Grad der Potenz anzeigt, die erste Zahl hervorbringt. Aus 25 die Quadratwurzel ziehen, ist so viel, als eine Zahl suchen, welche, einmal mit sich selbst multiplicirt, diese 25 wieder hervorbringt. Aber $25 = 5 \times 5$, folglich ist die 5 die Quadratwurzel von der Zahl 25. Aus 64 die Wurzel des dritten Grades finden, heißt, eine Zahl angeben, welche zur dritten Potenz erhoben, d. h. zweymal mit sich selbst multiplicirt, diese 64 wieder hervorbringt. Da nun 4^3 oder $4 \times 4 \times 4 = 64$, so ist 4 die Wurzel der dritten Potenz von 64.

nen, daß aus einer Zahl die Wurzel ausgezogen werden soll, bedient man sich des Zeichens $\sqrt{}$, welches vor diese Zahl gesetzt wird. Damit man aber zugleich weiß, wessen Grades die Wurzel sey, so wird eine kleine Ziffer innerhalb die Oeffnung des Wurzelzeichens gesetzt, welche durch die Menge ihrer Einheiten den Grad der Wurzel bemerkt. So ist $\sqrt[3]{}$ 27 so viel, als die Wurzel der dritten Potenz aus 27. Weil nun $3 \times 3 \times 3 = 27$, so ist $\sqrt[3]{}$ 27 = 3. Desgleichen ist $\sqrt[2]{}$ 64 = 8. Für die Quadratwurzel läßt man gewöhnlich die Ziffer aus dem Wurzelzeichen weg, und setzt $\sqrt{}$ 64 = 8; $\sqrt{}$ 49 = 7. Ferner ist $\sqrt[4]{}$ 10000 = 10, denn $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$.

§. 338. Erklärung. Eine Wurzel heißt eintheilig, wenn sie aus einem blosen Einer; zweytheilig, wenn sie aus einem Einer und einem Zehner; dreytheilig, wenn sie aus einem Hunderter, Zehner und Einer; und überhaupt mehrtheilig, oder vieltheilig, wenn sie aus noch höhern Decimalstellen zusammengesetzt ist. So ist 8, oder 5, oder 2 eine eintheilige, 14, oder 95 eine zweytheilige; 347 eine dreytheilige; 4783, oder 12738 eine vier und fünftheilige, oder überhaupt eine vieltheilige Wurzel. Jede dieser Wurzeln kann übrigens als die Wurzel des Quadrats, oder jeder folgenden höhern Potenz angesehen werden. Die höchste Ziffer dieser Wurzeln heißt der erste Theil, die darauf folgenden niedrigern Stellen hingegen, in ihrer natürlichen Ordnung, der zweyte, dritte, vierte ꝛc. Theil der Wurzel.

§. 339. Anmerkung. Der Gegenstand dieser Ab-

zwey, drey oder mehrtheilige Quadratwurzeln ausziehen zu können, muß man zuerst die verschiedenen Theile kennen lernen, woraus die Quadrate solcher Wurzeln zusammengesetzt sind. Dies gibt daher zu folgenden Untersuchungen Veranlassung.

§. 340. Lehrsatz. Das Quadrat einer eintheiligen Wurzel ist wenigstens ein Einer, und erstreckt sich höchstens in die Zehner.

Beweis. Wenn man alle Ziffer von 1 bis 9 als Quadratwurzeln ansieht, und nach der Reihe ihre Quadrate berechnet, so entsteht folgende Tabelle:

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate.	1	4	9	16	25	36	49	64	81

welche die Quadrate aller eintheiligen Wurzeln enthält. Hier ist aber das kleinste Quadrat = 1, und das größte = 81 Folglich ist der Lehrsatz bewiesen.

§. 341. Zusatz. Die Wurzel eines Quadrates, welches aus einer oder aus zwey Ziffern besteht, muß eintheilig seyn, denn wenn sie zweytheilig seyn könnte, so müßte sie wenigstens = 10 seyn, da 10 die kleinste Zahl von zwey Ziffern ist. Allein $10^2 = 100$, oder eine Zahl von 3 Ziffern, welche größer als 99, die größte Zahl aus 2 Ziffern, seyn muß. Daher müssen die Quadratwurzeln aller Zahlen von 1 bis 99 eintheilig seyn.

§. 341. Lehrsatz. Das Quadrat jeder zweytheiligen Wurzel bestehet aus drey Stücken:

I. Aus dem Quadrate des Zehners, oder des ersten Theils;

II. Aus einem zweyfachen Producte des Zehners in den Einer, oder des ersten Theils in den zweyten, und

ten Theils.

Beyspiel. Es sey 48 die gegebene zweytheilige Wurzel, so ist der erste Theil 40, der zweyte 8, folglich $48 \times 48 = (40 + 8) \times (40 + 8)$, welches folgende Rechnung gibt:

I. Th. II. Th.

$$\begin{array}{r} 40 + 8 \\ 40 + 8 \\ \hline \end{array}$$

$1600 = 40^2 =$ dem Quad. des I. Theils.

$320 = 40 \times 8 =$ dem Prod. des I. Th. in den II. Th.

$320 = 40 \times 8 =$ dem Prod. des I. Th. in den II. Th.

$64 = 8^2 =$ dem Quad. des II. Theils.

$2304 = 40^2 + 2 \times (40 \times 8) + 8^2 = 48^2$, und dieses Quadrat enthält wirklich die in dem Lehrsatze benannten Stücke, wie die Rechnung lehrt.

Beweis.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + a\,b \\ a\,b + b^2 \\ \hline (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

§. 342. Zusatz. I. Das Quadrat des ersten Theils ist das Product eines Zehners in einen Zehner, folglich ein Hunderter. Daher hat das Quadrat des ersten Theils seine niedrigste Stelle in den Hunderten. Da nun der erste Theil der Wurzel nicht kleiner als 10 und nicht größer als 90 seyn kann, so kann auch das Quadrat desselben nicht kleiner als $10 \times 10 = 100$ und nicht größer als $90 \times 90 = 8100$ seyn. Daher

senden.

II. Das doppelte Product entstehet aus der Multiplication eines Einers in einen Zehner, und muß folglich seine niedrigste Stelle in den Zehnern haben. Es wird am Größten werden, wenn beyde Wurzeltheile die größten Ziffer sind, welche es seyn können, d. h. wenn jede eine 9, folglich die Wurzel 90 + 9 ist. Hier wird nun dieses doppelte Product = 2 × 90 × 9 = 2 × 810 = 1620, woraus ersichtlich ist, daß die höchste Ziffer dieses doppelten Productes auch bis in die Tausende reichen könne.

III. Das Quadrat des zweyten Theils endlich, ist ein Product eines Einers in einen Einer, und hat folglich auch seine niedrigste Stelle in den Einern, und kann seine höchste in den Zehnern haben.

§. 344. Zusatz. Hieraus folget, daß das Quadrat des zweyten Theils, das doppelte Product des ersten in den zweyten Theil, und das Quadrat des ersten Theils der Wurzel mit ihren niedrigsten Ziffern in den Einern, Zehnern und Hunderten ihres Quadrates enthalten sind, und daß sich sogar die höchste Ziffer dieses Quadrates bis in die Tausende erstrecken könne.

§. 345. Zusatz. Das Quadrat der größten zweytheiligen Wurzel oder 99^2 gibt 9801, eine Zahl von vier Ziffern. Das Quadrat der kleinsten zweytheiligen Wurzel hingegen, oder 10^2 ist 100, die kleinste Zahl von drey Ziffern. Folglich hat jede Zahl, welche aus drey oder vier Ziffern besteht, eine zweytheilige Quadratwurzel. Wenn man daher eine gegebene Quadratzahl, deren höchste Ziffer ein Hunderter oder ein Tausender ist, von der Rechten gegen die Linke in Classen

Wurzel davon so viele Theile, als man Classen bekömmt, wenn gleich die linke Classe etwa nur aus einer Ziffer besteht. Wären die Quadratzahlen 3874 oder 793, so ständen sie nach dieser Abtheilung so: 38|74 und 7|93, wo dann im ersten Falle die linke Classe aus zwey, im letzten hingegen nur aus einer Ziffer bestände.

§. 346. Zusatz. In der niedrigsten Ziffer der rechten Classe fängt das Quadrat des zweyten Theils der Wurzel, und in ihrer höchsten das doppelte Product aus dem ersten in den zweyten Theil an. In der niedrigsten Ziffer der linken Classe hingegen hat das Quadrat des ersten Theils seinen Anfang.

§. 347. Zusatz. In der linken Classe ist das Quadrat des ersten Wurzeltheiles ganz enthalten. Wenn nun dieses Quadrat allein darin wäre, so würde offenbar die Quadratwurzel aus der Zahl in dieser Classe der erste Theil der zu findenden Wurzel seyn. Allein das doppelte Product kann auch noch etwas in diese Classe hinüber bringen, und so könnte ein Zweifel entstehen, ob dieses nicht etwa soviel betragen könnte, daß die Wurzel aus dieser Classe größer werde, als es eigentlich der erste Wurzeltheil für die gegebene Quadratzahl seyn sollte. Daß dieses aber nie geschehen könne, beweiset die Rechnung, wenn man für den ersten Theil der Wurzel alle Ziffer von 1 bis 9, für den zweyten hingegen jedesmal eine 9, als die größte Ziffer, setzt, welche man für diesen zweyten Theil annehmen kann, und welche daher auch am meisten in die linke Classe hinüber bringen muß. Hieraus entsteht folgendes Täfelchen:

I. Th.	Quadrat des I ten Theils.	Doppeltes Product.	Was von d. Prod. in d. linke Kl. kömmt.	Summe der 2. u. 4. Reihe.	Quadrat des um eine Einheit vermehrten Theils.
1	1	18	1	2	4
2	4	36	3	7	9
3	9	54	5	14	16
4	16	72	7	23	25
5	25	90	9	34	36
6	36	108	10	46	49
7	49	126	12	61	64
8	64	144	14	78	81

Aus diesem Täfelchen ist ersichtlich, daß in keinem Falle so viel von dem doppelten Producte in die linke Classe kommen könne, daß dieses die Wurzel des Quadrats vom ersten Theile um eine Einheit größer machte. Folglich ist die Wurzel des höchsten Quadrats, welches von der linken Classe abgezogen werden kann, jedesmal der erste Theil der Wurzel.

§. 348. Aufgabe. Aus einer Zahl, welche aus drey oder vier Ziffern besteht, die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung. I. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen, jede zu zwey Ziffern, so bekömmt man zwey Classen, und folglich zwey Wurzeltheile.

II. Man suche in dem Täfelchen (§. 340) ein Quadrat, welches das größte ist, das von der linken Classe abgezogen werden kann, und ziehe es wirklich davon ab. Die Wurzel dieses Quadrates ist der erste Wurzeltheil der angegebenen Zahl. Man schreibe ihn zur Rechten dieser Zahl, nachdem man einen Absönderungsstrich gezogen hat.

III. Der Rest in II. (wenn einer bleibt) ist Das-

bracht hat. Man nehme zu diesem Reste die zunächst folgende Ziffer der Quadratzahl herunter, so muß in diesen Ziffern das doppelte Product aus dem ersten Theile in dem zweyten enthalten seyn.

IV. Man verdopple nunmehr den nach II. gefundenen ersten Theil der Wurzel, dividire mit diesem Doppelten in die Zahl in III., so ist der Quotient der zweyte Theil der Wurzel. Denn die Zahl in III. enthält das Doppelte des ersten Theils in den zweyten; folglich muß der zweyte Theil herauskommen, wenn man den doppelten ersten hineindividirt, indem ein Factor, womit ins Product dividirt wird, den andern Factor dieses Productes zum Quotienten gibt. Diesen Quotienten multiplicire man mit dem Divisor, und ziehe das Product von dem Dividenden ab.

V. Zu dem etwaigen Reste in IV. nehme man die letzte Ziffer der Quadratzahl herunter, so wird in diesen Ziffern das Quadrat des zweyten Theils enthalten seyn. Man erhebe daher diesen zweyten Theil zum Quadrate, so ist dasselbe entweder eben so groß als die Zahl, wovon es abgezogen werden soll, oder es ist größer, oder kleiner als dieselbe. Im ersten Falle ist die angegebene Zahl eine vollkommne Quadratzahl, und die gefundene Wurzel ihre vollkommene Quadratwurzel.

VI. Im zweyten Falle von V. muß man den Quotienten in IV. um eine Einheit verringern, dann wieder nach IV. und V. verfahren, bis das Quadrat des zweyten Theils von der Zahl in V. abgezogen werden kann. Im dritten Falle von V. ist dies ein Beweis, daß die gefundene Wurzel diejenige ist, deren Quadrat der gegebenen Zahl am Nächsten kömmt, und der gebliebene

Quadrat der gefundenen Wurzel ist. Wenn man daher diese Wurzel quadrirt, und diesen Rest dazu addirt, so muß die erst angegebene Zahl herauskommen.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Sätze beruht auf den vorhergegangenen §§, und bedarf folglich keiner weitern Ausführung.

Beyspiele.

		Wurzeltheile
	I. √ 5 | 7 6	(I. II.
Quadrat des I. Theils	4	2 4
das dopp. Prod. steckt in	17	
der verdopp. I. Wurzelth.	(4)	
das doppelte Prod.	16	
	16	
Quadrat d. II. Theils	16	
	0	

Daher ist $\sqrt{576} = 24$. Die Probe hierüber wird gemacht, wenn $24^2 = 576$ ist, welches denn auch die Rechnung lehrt.

		Wurzeltheile
II.		I. II.
	√ 14|44	(3 8
Quadrat des I. Theils	9	
	54	
Der doppelte I. Theil	(6)	
Doppeltes Prod. aus I. in II.	48	
	64	
Quadrat des II. Theils	64	
	0	

Hierbey tritt der Fall ein, daß der Divisor 6 in seinem Dividenden 54 eigentlich 9mal enthalten ist. Das doppelte Product würde daher auch 54 und es bliebe kein Rest übrig. Nun kämé die letzte 4 herunter von welcher $9^2 = 81$ abgezogen werden sollte, welches doch nicht seyn kann. Da aber doch das Quadrat des zweyten Theils darin enthalten seyn muß, so wurde der zweyte Theil = 8 angenommen. Auch hier gibt die Probe wieder $38^2 = 1444$.

III. Wurzelth.

I. II.

$\sqrt{}$ 35|68 (59

25

106

(10) 295

90 3481 = 59^2

168 87 Rest

81 3568 Probe.

87 Rest.

IV. Wurzelth.

I. II.

$\sqrt{}$ 85|96 (92

81

49

(18) 828

36 8464 = 92^2

136 132 Rest

4 8596 Probe.

132 Rest.

§. 349. Aufgabe. Die Theile zu finden, woraus die Quadrate mehrtheiliger Wurzeln bestehen.

Auflösung. I. Man denke sich eine dreytheilige Wurzel = a + b + c, so läßt sich dieselbe in eine zweytheilige verwandeln, indem man sie = (a + b) + c setzt, und nun (a + b) als den ersten, und c als den zweyten Theil der Wurzel ansieht. Allein nach (§. 341.) ist $[(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2 \times (a + b) \times c + c^2$. Desgleichen ist $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$. Folglich wird hieraus $(a + b + c)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 + 2 \times (a + b) \times c + c^2$. Dieses mit Worten ausgedrückt, heißt: das Quadrat einer dreytheiligen Wurzel besteht aus

doppelten Producte aus dem ersten in den zweyten Theil; aus dem Quadrate des zweyten Theils; aus einem doppelten Producte aus dem ersten und zweyten Theile in den dritten, und aus einem Quadrate des dritten Theils.

II. Für eine viertheilige Wurzel, z. B. $a + b + c + d$, sage man $a + b + c + d = (a + b + c) + d$, wo jene Zahl den ersten, und diese den zweyten Theil vorstellt, so wird man sich unter $(a + b + c) + d$ eine zweytheilige Wurzel vorstellen können, deren Quadrat $(a + b + c)^2 + 2(a + b + c) \times d + d^2$, oder $= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c) \times d + d^2$ ist. Wenn also die dreytheilige Wurzel eine viertheilige wird, so kommen zu den Theilen, woraus das Quadrat der dreytheiligen nach I. bestehet, noch zwey Stücke, um das Quadrat der viertheiligen zu werden. Nämlich, erstlich ein doppeltes Product aus der Summe der drey vorhergehenden Theile der Wurzel in den vierten, und zweytens ein Quadrat dieses vierten Theiles.

III. Nimmt man eine fünftheilige Wurzel z. B. $a + b + c + d + e$ an, so kann man auch diese wieder in eine zweytheilige verwandlen, indem man die vier ersten Theile für einen, und den fünften für den folgenden zweyten ansieht. Denn $(a + b + c + d + e)^2 = [(a + b + c + d) + e]^2 = (a + b + c + d)^2 + 2(a + b + c + d)e + e^2$. Kömmt also zu der viertheiligen Wurzel noch ein neuer fünfter Theil, so kommen in dem Quadrate dieser fünftheiligen Wurzel wieder alle Stücke des Quadrats einer viertheiligen nach II. vor,

und nebst ihnen noch ein doppeltes Product aus der Summe der vier vorhergehenden Theilen in den fünften, und dann das Quadrat des fünften Theils selbst.

IV. Hieraus geht das allgemeine Gesetz hervor, nach welchem sich die Theile der Quadrate von mehrtheiligen Wurzeln leicht angeben lassen. Man bemerke folgende Regeln:

A. Das Quadrat einer mehrtheiligen Wurzel enthält, der Ordnung nach, die Quadrate aller Theile der Wurzel von dem höchsten bis zu dem niedrigsten.

B. Zwischen zwey solcher unmittelbar auf einander folgenden Quadrate liegt immer ein doppeltes Product aus der Summe aller vorhergehenden Theile der Wurzel in den neuen, dessen Quadrat nun nachfolgt.

§. 350. Zusatz. Wenn man irgend eine Zahl, z. B. 63894 als Wurzel ansieht, und zum Quadrate erhebt, so wird dieses die Quadrate aller Theile der Wurzel, und die doppelten Producte aus den Summen aller vorhergehenden Theile in die folgenden enthalten. Denkt man sich nun von dieser Wurzelzahl irgend zwey aufeinander folgende Theile, z. B. die 8 und die 9, (wobey man sich jede dieser Ziffer in ihrer gehörigen Ordnung vorstellen muß), so wird das Quadrat von 63894 unter andern auch das Quadrat von 8; dann ein doppeltes Product aus 638 in die 9 und endlich eine Quadrat von 9 enthalten. Gesetzt nun: das erste dieser Quadrate sey, mit seiner niedrigsten Ziffer, von einer gewissen bestimmten Ordnung, um deren Größe man sich nicht bekümmert, so wird das darauf folgende doppelte Product mit seiner niedrigsten Stelle auf der nächstniedrigern Ordnung seyn müssen, indem der Factor 8 zwar auf [illegible]en der Ordnung, wie bey dem Quadrate, der andere

Factor 9 hingegen auf der nächstniedrigern Ordnung, d. h. nach seiner Stelle zehnmal kleiner ist. Folglich wird dieses doppelte Product von 638 in 9 in dem Quadrate mit der niedrigsten Ziffer um eine Ordnung niedriger liegen, als das Quadrat von 8 mit der seinigen. Das Quadrat des Wurzeltheiles 9 ist eine Zahl von zwey Ziffern; jede derselben ist mit der niedrigsten Ziffer des doppelten Productes von eben der Ordnung; d. h. jede derselben ist wieder um eine Ordnung tiefer, als 8, weil 9 auf 8 in der Wurzel folget. Daher liegt auch wieder das Quadrat dieses folgenden Theils mit der niedrigsten Ziffer um eine Ordnung tiefer in dieser Quadratzahl, als das doppelte Product. Weil nun eben diese Sätze auf alle nacheinander folgende Wurzeltheile angewendet werden können, so ist überhaupt klar, das alle in dem Quadrate einer mehrtheiligen Wurzel enthaltene und unmittelbar aufeinanderfolgende Theile mit ihren niedrigsten Ziffern in den unmittelbar aufeinander folgenden Stellen der ganzen Quadratzahl anfangen, d. h. in der niedrigsten Ziffer der Quadratzahl fängt das Quadrat des niedrigsten Theils, in der nächsthöhern das doppelte Product aus der Summe aller vorhergehenden Theile in den niedrigsten, in der unmittelbar folgenden das Quadrat des vorletzten Theils der Wurzel, u. s. f. an.

§. 351. Aufgabe. Wenn eine Zahl von irgend einer Menge Ziffern gegeben ist, zu bestimmen, aus wieviel Theilen ihre Quadratwurzel bestehen werde.

Auflösung. Man theile die gegebene Zahl, woraus die Wurzel gezogen werden soll, von der Rechten zur Linken in Classen und gebe jeder Classe zwey Ziffer, so hat die Wurzel so viele Theile, als man Classen be-

Ziffer befindet.

Beweis. I. Gesetzt, die gegebene Zahl bestände aus fünf oder sechs Ziffern, so wird ihre Wurzel dreytheilig seyn. Denn sie kann weder aus zwey Theilen, noch aus vier Theilen bestehen. Man setze, die Wurzel dieser Zahl sollte zwey Theile haben, so bestände ihr Quadrat aus drey Stücken, welche (nach §. 350) in unmittelbar aufeinander folgenden Ordnungen anfangen, und sich auf Einer, Zehner und Hunderter beziehen. Nun kann aber das Quadrat des ersten Theils, für sich selbst, noch aus zwey Ziffern bestehen. Folglich wird das ganze Quadrat höchstens bis in die Tausende reichen. Allein die angegebene Zahl besteht aus fünf oder sechs Ziffern, folglich kann sie keine zweytheilige Wurzel haben. — Sollte hingegen diese Wurzel viertheilig seyn, so würde ihr Quadrat aus sieben Stücken bestehen, das Quadrat des ersten Theils würde mit seiner niedrigsten Ziffer von der sechsten Ordnung seyn und daher die Quadratzahl aus dieser Wurzel wenigstens aus sieben Ziffern bestehen müssen. Allein die angegebene Zahl hat deren nur fünf oder sechs. Daher muß ihre Wurzel nothwendig dreytheilig seyn.

II. Für eine Quadratzahl von eilf oder zwölf Ziffern wird die Wurzel immer sechstheilig seyn. Denn eine fünftheilige Wurzel gibt ein Quadrat, welches aus neun Stücken besteht, und höchstens zehn Ziffer enthalten kann, folglich auch kleiner als das gegebene von eilf oder zwölf Ziffern seyn muß. Eine siebentheilige Wurzel hingegen gibt fürs Quadrat dreyzehn Stücke und folglich eine Zahl von wenigstens dreyzehn Ziffern welche größer als die gegebene Quadratzahl seyn würde.

Gründe zur Rechtfertigung der Auflösung hinreichen: für eine Zahl, welche noch so viele Ziffer enthält, die Menge der Theile zu bestimmen, woraus ihre Wurzel besteht, indem der nämliche Beweis auf jeden andern Fall anwendbar ist. Daher ist die Richtigkeit der obigen Auflösung allgemein erwiesen.

§. 352. Aufgabe. Aus jeder gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung. I. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen und gebe jeder zwey Ziffer, so hat die Wurzel so viele Theile, als man Classen bekommen hat.

II. Man suche nun das größte Quadrat, welches von der höchsten Classe hinweggenommen, werden kann, setze es unter diese Classe, und ziehe es ab. Die Wurzel dieses Quadrates ist der erste Theil der Wurzel der Zahl welchen man zur Rechten derselben neben einen gezogenen Absönderungsstrich schreibt.

III. Zu dem Reste in (II.) nehme man die folgende Stelle aus der Zahl, so enthält nun dieses Ganze das doppelte Product aus dem I. Theile in den II. Theil. Man verdopple daher den eben gefundenen ersten Theil der Wurzel und dividire damit in diese Zahl, so ist der Quotient der zweyte Wurzeltheil. Man multiplicire ihn mit dem doppelten ersten Theile und ziehe dieses Product vom Dividenden ab.

IV. Zu dem etwaigen Reste in III. nehme man wieder die nächstniedrigere Ziffer der gegebenen Zahl herunter, mache ein Quadrat des zweyten Theils der Wurzel und ziehe es von der letztern Zahl ab, so ist, wenn dieser Abzug geschehen kann, der gefundene zweyte Wurzeltheil

daß es abgezogen werden konnte, so müßte dieser Wurzeltheil so lange um eine Einheit vermindert werden, bis dieser Abzug geschehen kann.

V. Kömmt zu dem Reste in IV. wieder die nächstfolgende Stelle der Zahl, so enthält dieses Ganze ein doppeltes Product aus dem Iten und IIten Theil in den IIIten. Nun verdopple man die beyden ersten Wurzeltheile, dividire hiermit in dasselbe, so ist der Quotient der dritte Theil der Wurzel, welchen man wieder mit dem Divisor multiplicirt, dann dieses Factum vom Dividenden abzieht, zu dem Reste die folgende Ziffer herunter nimmt und von diesem Ganzen das Quadrat des dritten Theils hinwegnimmt, wo sich denn daraus, ob dieser Abzug geschehen kann, oder nicht, ergibt, ob der dritte Theil der Wurzel richtig, oder zu groß angenommen worden ist, in welchem letzten Falle derselbe um eine, oder einige Einheiten vermindert werden muß.

VI. Zu dem in V. gebliebenen Reste kömmt wieder die folgende Ziffer der Zahl und man fährt, um die folgenden Theile der Wurzel zu finden, immer nach III, IV. und V. fort, indem man für die nachfolgenden Divisoren jedesmal die doppelten Producte aus der Summe aller bereits gefundenen Wurzeltheile nehmen muß. Auf diese Weise kömmt man bis zu dem letzten Theile der Wurzel, dessen Quadrat, wenn man es abgezogen hat, entweder einen Rest übrig läßt, oder nicht. In jenem Falle ist es ein Zeichen, daß die gegebene Zahl um diesen Rest größer, als das Quadrat der gefundenen Wurzel; in diesem hingegen, daß dieselbe das vollkommene Quadrat der gefundenen Wurzel sey.

VII. Eine Probe über dieses ganze Verfahren ist,

und, im Falle noch ein Rest übrig bleibt, derselbe dazu addirt, die vorgegebene Zahl wieder hervorbringen muß.

Beyspiele.

		Th. der Wurzel. I. II. III.
I.	$\sqrt{}$ 73|44|49	(8 5 7.
Quadrat des I. Theils	64	
	94	
Doppelter I. Theil	(16)	
Dopp. Prod. aus I. in II.	80	
	144.	
Quadrat des II. Theils.	25	
	1194	
Doppelter I. und II. Theil	(170)	
Dopplt. Prod. a. I. u. II. in III.	1190	
	49	
Quadrat des III. Theils	49	
	0	

Probe.

857
857

5999
4285
6856

734449 = 857^2.

Theile der Wurzel.
I. II. III. IV.

II. $\sqrt{}$ 78|54|73|92 (8 8 6 2

Quadrat des I. Theils 64

145

Doppelter I. Theil (16)

Dopp. Prod. a. I. in II. 128

174

Quadrat des II. Theils 64

1107

Dopp. I. und II. Theil (176)

Dopp. Prod. a. I. u. II. in III. 1056

513

Quadr. des III. Theils 36

4779

Dopp. I, II. u. III. Th. (1772)

Dopp. Prod. a. I, II. u. III. in IV. 3544

12352

Quadrat des IV. Theils 4

12348 Rest.

Probe.

8862

8862

17724

53172

70896

70896

78535044 Quadrat d. gef. W.

12348 der gebliebene Rest.

78547392 die gegebene Zahl.

Theile der Wurzel.
I.II.III.IV.V.

III. $\sqrt{}$ 82|96|85|48|97(9 1 0 8 7
Quad. des I. Theils 81

19
Dopp. I. Theil (18)
Dopp. Pr. a. I. in II. 18

16
Quad. des II. Theils 1

158
Dopp. I. u. II. Theil (182)
D. Pr. a. I. u. II in III. 000

1585
Quadrat des III. Theils 0

15854
Dopp. I. II. und III. Th. (1820)
D. P. a. I, II, III. in IV. 14560

12948
Quadr. des IV. Theils 64

128849
Dopp. I, II, III. u. IV. Th. (18216)
D. Pr. a. I, II, III, IV. in V. 127512

13377
Quadrat des V. Theils 49

13328 Rest.

Probe.

91087
91087

637609
728696
91087
819783

8296841569 = 91087^2
13328 Rest

8296854897 die gegeb. Zahl.

Einige Uebung in Auflösung ähnlicher Aufgaben wird den Anfänger in den Stand setzen, sich im Ausziehen der Quadratwurzeln die nöthige Fertigkeit zu erwerben.

§. 353. Lehrsatz. Das Quadrat eines Bruches entsteht, wenn man den Zähler und den Nenner desselben zum Quadrate erhebt.

Beweis. Das Quadrat eines Bruches ist ein Product dieses Bruchs mit sich selbst; folglich ein Bruch, dessen Zähler ein Product des Zählers in sich selbst, und dessen Nenner ein Product des Nenners in sich selbst ist, d. h. der Zähler und Nenner muß quadrirt werden, wenn der Bruch quadrirt wird. So ist z. B. $\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{5^2}{8^2} = \frac{25}{64}$; $\left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{3^2}{10^2} = \frac{9}{100}$; $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{7^2}{4^2} = \frac{49}{16}$ u. s. w.

§. 354. Zusatz. Wenn daher aus einem gegebenen Bruche die Quadratwurzel gezogen werden soll, so muß man dieselbe sowohl aus seinem Zähler, als aus seinem Nenner finden. Oder $\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$. Denn $(\sqrt{\frac{3}{8}})^2 = \sqrt{\frac{3}{8}} \times \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8}$ und $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{8} \times \sqrt{8}}$ (§. 353) $= \frac{3}{8}$ wie vorhin. Desgleichen ist nun $\sqrt{\frac{16}{19}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{19}} = \frac{4}{\sqrt{19}}$; $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$; $\sqrt{\frac{7}{81}} = \frac{\sqrt{7}}{9}$ u. s. w.

§. 355. Lehrsatz. Wenn man einen uneigentlichen Bruch, dessen Nenner in seinem Zähler nicht ohne Rest enthalten ist, d. h. eine ganze Zahl nebst einem eigentlichen Bruche, zum Quadrate erhebt, so wird dieses Quadrat nie eine reine ganze Zahl, sondern immer eine ganze Zahl nebst einem Bruche seyn.

Beweis. Man nehme an, $\frac{17}{5}$ sey der gegebene uneigentliche Bruch und setze einmal, sein Quadrat oder $\frac{17 \times 17}{5 \times 5}$ gebe eine reine ganze Zahl, welche n heissen soll, so wäre $\frac{17 \times 17}{5 \times 5} = n$, und folglich $\frac{17 \times 17}{5} = 5 \times n$ d. h. auch eine ganze Zahl, da eine ganze Zahl durch eine ganze Zahl multiplicirt, gewiß wieder eine ganze zum Producte gibt. Daher müßte das Product 17×17 sich durch 5 ohne Rest aufdividiren lassen, d. h. 5 müßte ein Factor des Products 17×17 seyn. Nun ist aber, nach der Annahme des Lehrsatzes, diese 5 kein Factor von 17. Folglich kann 5 nur auf diese Art ein Factor von 17×17 seyn, daß 5 selbst ein Product von zwey Factoren ist, deren einer ein Factor von dem einen 17, der andere von dem andern 17 wäre. Nun würde das Product aus 17 in 17 jenes Product 5 als Factor enthalten. Weil aber ein 17 mit dem andern 17 einerley ist, so kann das eine keinen Factor von 5 enthalten, welchen das andere 17 nicht auch enthielte. Folglich ist entweder in keinem 17 ein Factor von 5 enthalten, oder das ganze 5 ist als ein Factor in einem jeden 17 enthalten. Dieses letzte soll aber, der Voraussetzung des Lehrsatzes gemäß, nicht seyn; folglich hat auch das erste nicht Statt, und daher ist 5 kein Factor von 17×17, daher auch $\frac{17 \times 17}{5 \times 5}$ keine reine ganze Zahl.

Da dieser Beweis von jedem andern Beyspiele in Zahlen auf die nämliche Weise geführt werden kann, so ist nichts gegen seine Allgemeinheit einzuwenden.

Anderer Beweis. I. Wenn man die ganze Zahl a, und den eigentlichen Bruch $\frac{b}{c}$ nennt, so soll bewiesen werden, daß das Quadrat von $a + \frac{b}{c}$, oder $(a + \frac{b}{c})^2$ keine reine ganze Zahl seyn kann.

II. Man nehme einmal an, $(a + \frac{b}{c})^2$ sey wirklich eine ganze Zahl, welche durch d bezeichnet werden soll, so wäre $(a + \frac{b}{c})^2 = d$.

III. Weil nun $(a + \frac{b}{c})^2 = a^2 + \frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2}$, so hätte man auch $a^2 + \frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2} = d$, oder, wenn man a^2 auf beyden Seiten wegnimmt, $\frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2} = d - a^2$. Da nun d so wie a^2 eine ganze Zahl ist, so muß auch die Differenz $d - a^2$ eine ganze Zahl seyn. Sie heiße f, so ist $\frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2} = f$.

IV. Multiplicirt man in III. alles mit c, so wird $2ab + \frac{b^2 c}{c^2} = fc$, oder $2ab + \frac{b^2}{c} = \frac{2abc + b^2}{c}$ $= \frac{(2ac + b) \times b}{c} = (2ac + b) \times \frac{b}{c} = fc$, woraus $\frac{b}{c} = \frac{fc}{2ac + b}$ folget.

V. Weil nun nach IV. der Bruch $\frac{b}{c}$ dem andern $\frac{fc}{2ac + b}$ gleich ist, so muß es eine Zahl geben, welche

in den Zähler und Nenner des letztern dividirt, zu Quotienten den Zähler und Nenner des ersten hervorbringt. Diese Zahl heiße n, so wird $\frac{2ac+b}{n} = c$, und folglich $2ac + b = nc$, daher $\frac{2ac+b}{c} = n$, oder $\frac{2ac}{c} + \frac{b}{c} = n$, d. h. $2a + \frac{b}{c} = n$, woraus denn $\frac{b}{c} = n - 2a$ folgt.

VI. In V. ist n, so wie auch 2 a eine ganze Zahl. Daher wird auch $n - 2a$ eine ganze Zahl seyn. Sie heiße h, so ist $\frac{b}{c} = h$, d. h. der eigentliche Bruch $\frac{b}{c}$ ist einer ganzen Zahl gleich. Da nun dieses ein Widerspruch ist, und doch aus der Annahme in II., daß $(a + \frac{b}{c})^2$ eine ganze Zahl sey, richtig gefolgert wurde, so kann $(a + \frac{b}{c})^2$ keine ganze Zahl seyn.

§. 356. Erklärung. Man denke sich zwey ganze Zahlen, welche um eine Einheit von einander verschieden sind, als Quadratwurzeln, und mache ihre Quadrate, so werden diese um mehrere Einheiten von einander verschieden seyn. So ist z. B. $5^2 = 25$, und $6^2 = 36$, wo man sich zwischen 25 und 36 mehrere Zwischenzahlen denken kann. Nimmt man nun eine dieser Zahlen, z. B. 31 als eine Quadratzahl an, so ist klar, daß $\sqrt{31}$ größer als $\sqrt{25}$, d. h. größer als 5, und $\sqrt{31}$ kleiner als $\sqrt{36}$ d. h. kleiner als 6 seyn werde. Soll also $\sqrt{31}$ eine bestimmbare Zahl seyn, so müßte dieselbe, weil sie größer als 5 und kleiner als 6 seyn muß, die Zahl 5 nebst einem eigentlichen Bruche seyn. Nun kann aber das Quadrat einer ganzen Zahl nebst einem eigentlichen Bruche (nach §. 355.) nie eine reine ganze Zahl seyn; folglich kann es auch keine Zahl geben, welche,

einmal mit sich selbst multiplicirt, diese 31 hervorbringt. Es gibt daher Zahlen, deren Quadratwurzeln nicht genau angegeben werden können. Diese Zahlen nun, welche weder durch Ganze, noch durch Theile der Einheit ausgedrückt werden können, heißen Irrationalzahlen, da im Gegentheile alle andere, welche entweder durch ganze Zahlen, oder durch Theile derselben dargestellt werden können, Rationalzahlen genennt werden. Beyspiele von Irrationalzahlen sind $\sqrt{7}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{113}$; $\sqrt{247}$ u. s. w. Ueberhaupt erhellet hieraus, daß es bey Ausziehung der Quadratwurzeln weit mehr Irrational- als Rationalzahlen gebe. So finden sich z. B. in der Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 nur 10 rationale, hingegen 90 irrationale Quadratwurzeln vor. Die rationalen sind: $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{100}$. Alle andere sind irrational.

§. 357. Zusatz. Aus dem Bisherigen geht hervor, daß man bey jeder Zahl, woraus die Wurzel gezogen werden soll, im Falle dieselbe irrational ist, zwey Wurzeln finden kann, welche nur um eine Einheit von einander unterschieden sind, und zwischen welche die Wurzel der zu findenden Zahl fallen muß. Allein der Fehler würde zu beträchtlich seyn, wenn man die eine oder die andere dieser beyden Zahlen für die wahre Wurzel annehmen wollte. Man muß daher ein Mittel haben, wie man sich dem Werthe dieser Wurzel (welchen man aber doch nie völlig erreichen kann) wenigstens so weit nähert, als es die Schärfe der jedesmaligen Rechnung erfodert. So ist z. B. $\sqrt{7}$ kleiner als 3 und größer als 2. Nun setze man $7 = \frac{700}{100}$, so wird

$\sqrt{100}$ 10

100 = 10. Hier gibt aber $\sqrt{}$ 700 eine zweytheilige Wurzel d. h. einen Einer und einen Zehner, welches, durch einen Zehner dividirt, einen Einer nebst einem Bruche, dessen Nenner dieser Zehner ist, als Wurzel gibt, wodurch denn diese Wurzel schon genauer bestimmt ist. — Setzt man $7 = \frac{7\,00\,00}{1\,00\,00}$, so wird eben so $\sqrt{}$ 7

$$= \sqrt{\frac{7\,00\,00}{1\,00\,00}} = \frac{\sqrt{\ 70000}}{\sqrt{\ 10000}} = \frac{\sqrt{\ 70000}}{100},$$ wo $\sqrt{}$ 70000

eine dreytheilige Wurzel gibt, welche, durch 100 dividirt, eine ganze Zahl nebst einem Bruche von 100 Theilchen zum Quotienten hervorbrigt. Wollte man noch engere Gränzen für die Wurzel bestimmen, so müßte man $\sqrt{}$ $7 = \sqrt{\frac{7\,00\,00\,00\,00}{1\,00\,00\,00\,00}}$ setzen, wo $\sqrt{}$ $7 = \frac{\sqrt{\ 7000000}}{1000}$,

und folglich diese Wurzel durch eine ganze Zahl und 1000 Theilchen der Einheit ausgedruckt würde, u. s. w.

§. 358. Zusatz. Durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens ist überhaupt ersichtlich, daß für jedes Nullenpaar, welches an die Zahl, woraus die Wurzel gezogen werden soll, angehängt wird, ein neuer Wurzeltheil in fortgesetzten Decimalbruchstellen gefunden werde. Da nun diesem Anhängen von Nullen an die vorgegebene Zahl keine Gränzen gesetzt sind, so erhellet, daß man hier durch ihre Wurzel immer genauer und genauer finden, d. h. sich ihrem Werthe ins Unendliche nähern kann. Darum wird auch dieses Verfahren das Ausziehen der Quadratwurzel durch Näherung genennt.

§. 359. Aufgabe. Aus einer unvollständigen Quadratzahl die Quadratwurzel durch Näherung zu finden.

erreichenden Schärfe der Rechnung, für gut findet, ziehe die Wurzel aus diesem Ganzen, und dividire sie durch die halbe Anzahl der angehängten Nullen, so ist der Quotient die gesuchte Wurzel.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung beruhet auf den unmittelbar vorhergehenden Sätzen.

Beyspiele. I. Man soll $\sqrt{8}$ finden. Hier setze man $\sqrt{8} = \sqrt{\frac{80000000}{10000}} = \frac{\sqrt{80000000}}{10000}$, so gibt die Rechnung Folgendes:

Theile der Wurzel

$\sqrt{8|00|00|00|00}$ | 28284

4

4 | 40

32

80

64

56 | 160

112

480

4

564 | 4760

4512

2480

64

5656 | 24160

22624

15360

16

15344 Rest.

$2 + \frac{8000}{100000} + \frac{200}{100000} + \frac{80}{100000} + \frac{4}{100000} = 2 + \frac{8}{10}$ $+ \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{4}{10000} = 2{,}8284$. Wollte man eine Probe hierüber machen, so müßte man die gefundene Wurzel 2,8284 quadriren, und hierzu den gebliebenen Rest addiren, wo denn diese Summe = 8 werden muß. Nämlich:

2,8284
2,8284

113136
226272
56568
226272
56568

$(2{,}8284)^2 = 7{,}99984656$
der gebliebene Rest 15344

$8{,}00000000 = 8.$

II. Man soll $\sqrt{}$ 127 finden. Will man die Wurzel durch hunderttausend Theilchen ausdrücken, so muß man, da die Hunderttausendtel von der fünften Decimalbruch-Ordnung sind, an die 127 noch fünf Paare, d. h. zehn Nullen hängen, dann die $\sqrt{}$ 12700000000000 berechnen, und dieselbe durch 100000 dividiren. Die Rechnung gibt Folgendes:

1

(2) 2

2

7

1

(22) 60

44

160

4

(224) 1560

1344

2160

36

(2252) 21240

20268

9720

81

(22538) 96390

90152

62380

16

(225388) 623640

450776

1728640

4

Rest 1728636

Es ist also $\sqrt{127} = \frac{11}{1}\frac{26}{00}\frac{42}{00} = 11 + \frac{20060}{100000} + \frac{6000}{100000} + \frac{900}{100000} + \frac{40}{100000} + \frac{2}{100000} = 11 + \frac{2}{10} + \frac{6}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{2}{100000} = 11{,}26942.$

11,26942
11,26942
2253884
4507768
10142478
6761652
2253884
1126942
1126942

$(11,26942)^2 = 126,9998271364$

Rest = 1728636

$127,0000000000 = 127.$

§. 360. Erklärung. Wenn man die Quadratwurzel eines gemeinen Bruches verlangt, so muß sowohl aus seinem Zähler, als aus dem Renner desselben diese Wurzel gezogen werden. Hierbey kann nun der Fall eintreten, daß entweder die Wurzel des Zählers allein, oder jene des Renners allein, oder jene von beyden Irrationalzahlen sind. Bey jeder dieser Voraussetzungen wird die Größe des Bruchs nicht genau angegeben werden können. Daher heißen solche Brüche irrationale Brüche, deren Werthe man sich wieder so weit nähern kann, als man will, ohne ihn jedoch je ganz genau bestimmen zu können. So ist z. B. $\sqrt{\frac{7}{25}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{7}}{5}$; ferner $\sqrt{\frac{144}{379}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{379}} = \frac{12}{\sqrt{379}}$; endlich $\sqrt{\frac{27}{32}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{32}}$, wo beyde Wurzeln Irrationalzahlen sind.

Um jedoch in diesem letzten Falle wenigstens den Renner des Bruches rational zu machen, multiplicire

man sowohl den Zähler als den Nenner des gegebenen Bruches mit seinem Nenner, wo denn immer der neue Nenner eine rationale Wurzel geben wird. Z. B. $\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3 \times 8}{8 \times 8}} = \frac{\sqrt{24}}{8}$. Ferner ist $\sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{7 \times 12}{12 \times 12}} = \frac{\sqrt{7 \times 12}}{12} = \frac{\sqrt{84}}{12}$ u. s. w.

Auf ähnliche Art kann auch der Zähler in eine Rationalzahl verwandelt werden.

§. 361. Zusatz. Um aus einem (reinen oder gemischten) Decimalbruche die Quadratwurzel zu finden, bemerke man ob die Zahl seiner Bruchstellen eine gerade oder eine ungerade sey. Im ersten Falle ist die Classen-Abtheilung die gewöhnliche; im letzten hänge man zur Rechten der kleinsten Bruchstelle eine Nulle und theile sodann auch wie gewöhnlich die Classen ab. Die Rechnung ist in beyden Fällen die bekannte. Folgende Beyspiele erläutern dieses Verfahren.

I. $\sqrt{369,54} = \sqrt{\frac{36954}{100}} = \frac{\sqrt{36954}}{10} = \frac{\sqrt{3|69|54}}{10}$.

II. $\sqrt{4362,317} = \sqrt{\frac{4362317}{1000}} = \sqrt{\frac{43623170}{10000}} = \frac{\sqrt{43|62|31|70}}{100}$.

III. $\sqrt{0,542} = \sqrt{\frac{542}{1000}} = \sqrt{\frac{5420}{10000}} = \frac{\sqrt{54|20}}{100}$

u. s. w.

§. 362. Anmerkung. Um den Nutzen dieser Lehre von der Ausziehung der Quadratwurzel (ohne welche viele Theile der reinen und angewandten Mathematik sehr mangelhaft seyn würden) hier wenigstens im Allgemeinen zu zeigen, sollen einige Aufgaben aufgelößt werden, woraus man die Anwendbarkeit derselben auf Fälle, welche im gemeinen Leben vorkommen, ersehen kann.

§. 363. Aufgabe. Zu zwey gegebenen Zahlen, als den äussern Gliedern einer Proportion, eine mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Man multiplicire die beyden gegebenen Zahlen mit einander und ziehe aus ihrem Producte die Quadratwurzel, so ist diese das mittlere Proportionalglied.

Beweis. In jeder geometrischen Proportion ist das Product aus den beyden äussern Gliedern so groß als ein Product aus den innern. Soll nun die Proportion eine stetige seyn, so ist das Product der äussern Glieder dem Quadrate des innern gleich. Da nun gleiche Größen auch gleiche Quadratwurzeln haben, so wird die Wurzel aus dem Producte der äussern Glieder das zu findende mittlere geben.

Beyspiele. I. Man soll zwischen den Zahlen 6 und 24 eine mittlere geometrische Proportionalzahl finden. Heißt man sie x, so ist $6 : x = x : 24$, folglich $x^2 = 6 \times 24 = 144$, und $x = \sqrt{144} = 12$. Daher ist die Proportion diese $6 : 12 = 12 : 24$.

II. Um zwischen die Zahlen 9 und 48 ein mittleres Glied einzuschieben, wird $x = \sqrt{9 \times 48} = \sqrt{432}$, wo man den Werth für diese Wurzel durch Näherung finden muß.

§. 364. Aufgaben zur Anwendung. I. Wenn man den Werth der Edelsteine schätzt, so nimmt man an, daß derselbe wie das Quadrat ihres Gewichtes zunimmt; d. h. ein Edelstein, welcher zwey, drey oder viermal schwerer, als ein anderer von der nämlichen Art ist, wird vier, neun oder sechzehnmal so viel werth seyn, als der erstere. Gesetzt nun, der Preis eines Diamanten, welcher 6 Gran wiegt, sey $5\frac{1}{2}$ fl. und man sollte fin-

werth ist. Hier schließt man: wie sich der kleine Werth des einen Diamanten zu dem größern Werte des andern verhält, so wird sich das Quadrat des gegebenen Gewichtes vom ersten zu x^2, oder zu dem Quadrate des Gewichts vom zweyten verhalten. Oder:

$5\frac{1}{2} : 3000 = 6^2 : x^2$, folglich

$\frac{11}{2} : 3000 = 36 : x^2$, oder

$11 : 6000 = 36 : x^2$, wo

denn $x^2 = \frac{6000 \times 36}{11} = \frac{216000}{11}$. Aber $\sqrt{\frac{216000}{11}} =$

$\sqrt{\frac{216000 \times 11}{11 \times 11}} = \frac{= \sqrt{2376000}}{11} = \frac{1541,42}{11} = 140,12$

Folglich wird der angegebene Diamant 140,12 Gran wiegen.

II. Um einen kreisförmigen Flächenraum von 40 Quadrat Ruthen mit Bäumen zu umpflanzen, braucht man 300 Stück; wie viele Bäume wird man nöthig haben, um einen andern kreisrunden Platz von 24 Ruthen auf eben diese Art zu umgeben? — Zur Auflösung dieser Aufgabe muß man bemerken, daß sich die Größe der Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Umfangslinien verhalten. Nennt man daher x die zu suchende Menge von Bäumen, so ist die Proportion diese:

$40 : 24 = 300^2 : x^2$, oder

$40 : 24 = 90000 : x^2$, oder

$5 : 3 = 90000 : x^2$, oder

$1 : 3 = 18000 : x^2$, woraus

$x^2 = 3 \times 18000 = 54000$ folglich $x = \sqrt{54000}$ wird. Weil nun $\sqrt{54000} = 232$ nebst einem Reste, so wird man 232 Bäume hierzu vonnöthen haben.

III. Wie viele Weinstöcke können auf ein quadratisches

jedesmal zwischen zwey Stöcken einen Raum von $2\frac{1}{2}$ Schuhen läßt. — Weil man diese 160 Ruthen für ein vollkommnes Quadrat annimmt, so ist $\sqrt{}$ 160 die Länge der einen Seite desselben, denn in der Geometrie wird bewiesen, daß das Maas einer Linie, durch eine Zahl von Ruthen ausgedrückt und mit sich selbst multiplicirt, die Menge der Quadrat Ruthen anzeigt, welche in dem Quadrate enthalten sind, wovon diese Linie die eine Seite ist. Allein $\sqrt{}$ 160 = 12,64 Ruthen, oder, weil man zehn Schuhe auf eine Ruthe, zehn Zolle auf einen Fuß rechnet, = 12 Ruthen, 6 Schuh, 4 Zolle = 1264 Zolle. Nun beträgt der Abstand zweyer Stöcke $2\frac{1}{2}$ Schuh = 2,5 Zoll = 25 Zolle. Folglich können $\frac{1264}{25}$ = 50 Stöcke auf einer Seite des Quadrats, und 50 × 50 = 2500 auf dessen ganzer Fläche stehen. Der Rest, welcher bey Ausführung der Division $\frac{1264}{25}$ bleibt und $\frac{4}{5}$ beträgt, kann in diesem Beyspiele keine Bedeutung haben.

Vierte Abtheilung.

Von der Ausziehung der Cubikwurzel.

§. 365. Erklärung. Ein Product von drey gleichen Factoren heißt der Würfel oder Cubus von einem dieser Factoren, und jeder Factor wird in Bezug auf den Würfel dessen Cubikwurzel genennt. So ist z. B. $5 \times 5 \times 5 = 125$, und 125 ist der Würfel von 5, die 5 aber die Cubikwurzel von 125. Da der Würfel die dritte Potenz der Wurzel ist, so bezeichnet man ihn auch mit dem Exponenten 3, welcher zur Rechten und oben an die Wurzel gesetzt wird. Daher ist z. B. $5^3 = 125$; $4^3 = 64$; $10^3 = 1000$, u. s. w.

Aus einer gegebenen Zahl die Cubikwurzel ziehen, heißt soviel, als eine Zahl finden, welche dreymal als Factor gesetzt, jéne erste Zahl hervorbringt. So ist z. B. die Cubikwurzel von $512 = 8$, weil $8 \times 8 \times 8 = 512$ ist. Um die Ausziehung der Cubikwurzel zu bezeichnen, schreibt man die Ziffer 3 in die Oeffnung des Wurzelzeichens. So ist z. B. $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{729} = 9$; $\sqrt[3]{1000} = 10$ u. s. w.

§. 366. Lehrsatz. Der Würfel einer eintheiligen Wurzel ist wenigstens $= 1$ und kann höchstens $= 729$ seyn.

Beweis. Die Wahrheit dieses Satzes ergibt sich

der ihnen zugehörigen Würfel. Es sind nämlich:

1	2	3	4	5	6	7	8	9 Wurzeln
1	8	27	64	125	216	343	512	729 Würfel

§. 367. Zusatz. Hieraus folgt unmittelbar, daß alle Zahlen, welche aus drey Ziffern, oder aus zwey Ziffern, oder aus einer Ziffer bestehen, nur eine Ziffer zur Cubikwurzel haben.

§. 368 Lehrsatz. Der Würfel jeder zweytheiligen Wurzel enthält folgende vier Stücke:

I. Den Würfel des ersten Theils, oder des Zehners.

II. Ein dreyfaches Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten, oder aus dem Quadrate des Zehners in den Einer,

III. Ein dreyfaches Product aus dem ersten Theil in das Quadrat des zweyten, oder aus dem Zehner in das Quadrat des Einers, und

IV. Den Würfel des zweyten Theils, oder den Würfel des Einers.

Beweis. Wenn $a + b$ die gegebene zweytheilige Wurzel ist, so wird $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Multiplicirt man dieses Quadrat von $a + b$ nochmals mit der Wurzel, so entsteht der Würfel. Nämlich:

$a^2 + 2ab + b^2$ Quadrat von $a + b$

$a + b$ Wurzel

$a^3 + 2a^2b + ab^2$

$a^2b + 2ab^2 + b^3$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ Würfel von $a + b$.

Vergleicht man jedes dieser vier Stücke mit jedem in obigem Lehrsatze genannten, so überzeugt man sich von der Richtigkeit der Behauptung.

Beyspiel. Es sey $a = 40$ und $b = 8$, so wird

Dies gibt folgende Rechnung: $a^3 = 40^3 = 64000$.
$3a^2b = 3 \times 40^2 \times 8 = 3 \times 1600 \times 8 = 38400$;
$3ab^2 = 3 \times 40 \times 8^2 = 3 \times 40 \times 64 = 7680$; $b^3 = 8^3 = 512$. Addirt man diese Stücke zusammen, so wird die Summe $= 64000 + 38400 + 7680 + 512 = 110592 = 48^3$, wie die wirkliche Rechnung zeigt:

48] Wurzel
48]

384
192

2304 Quadrat
48

18432
9216

110592 Würfel

§. 369. Zusatz. Auf diese Weise kann man den Würfel einer jeden zweytheiligen Wurzel aus den vier Stücken, welche er enthält, in Zahlen zusammensetzen. Diese Uebung ist besonders den Anfängern zu empfehlen.

§. 370. Zusatz. I. Der Würfel des ersten Theils der zweytheiligen Wurzel ist der Würfel eines Zehners, und muß, da $10 \times 10 \times 10 = 1000$ ist, seine niedrigste Stelle in den Tausenden haben. Da der erste Wurzeltheil höchstens 90 seyn kann, so kann auch der Würfel des ersten Theils höchstens $= 90 \times 90 \times 90 = 729000$ seyn, d. h. er kann sich höchstens in die Hunderttausende erstrecken.

II. Das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten ist ein Product aus dem Quadrate eines Zehners in einen Einer, und muß somit

wird am Größten werden, wenn die Wurzel = $90 + 9$ ist, wo dasselbe = $3 \times 90^2 \times 9 = 3 \times 8100 \times 9 = 218700$ wird, und sich ebenfalls noch in die Hunderttausende erstreckt.

III. Da das zweyte dreyfache Product ein Dreyfaches aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweyten, d. h. aus einem Zehner in das Quadrat eines Einers ist, so muß es seine niedrigste Stelle in den Zehnern haben. Bey der größten Wurzel wird es = $3 \times 90 \times 9^2 = 3 \times 90 \times 81 = 21870$ und reicht daher höchstens in die Zehntausende.

IV. Der Würfel des zweyten Theils endlich muß, als der Würfel eines Einers, auch in den Einern seine niedrigste Stelle haben. Da der zweyte Theil höchstens = 9 seyn kann, so ist dessen Würfel höchstens = 729, welcher sich in die Hunderte erstreckt.

§. 371. Zusatz. Hieraus ersieht man, daß die vier Stücke, welche die Theile des Würfels, einer zweyzifferigen Wurzel bilden, mit ihren niedrigsten Stellen in den vier unmittelbar auf einander folgenden Ordnungen der Tausende, Hunderte, Zehner und Einer anfangen.

§. 372. Zusatz. Die größte zweytheilige Wurzel ist 99 und ihr Würfel = 970299; die kleinste dreyzifferige Wurzel aber ist 100 und ihr Würfel = 1000000. Da nun der Würfel von 10 = 1000 ist, so muß jede vier, fünf oder sechszifferige Zahl eine zweyzifferige Cubikwurzel haben. Die Cubikwurzeln der Zahlen: 438965, 58934, 6807 haben daher nicht mehr, als zwey Ziffer, und wenn man ihren ersten Theil a, den zweyten Theil b nennt, so müßen die bekannten vier Stücke:

jede dieser drey Zahlen von der Rechten zur Linken in zwey Classen theilt; so daß die rechte Classe immer drey Ziffer enthält, nämlich:

438|965 58|934 6|807

so muß in den Ziffern der linken Classe jedesmal der Würfel des ersten Theils der Wurzel enthalten seyn. Auch müßen in jeder der drey folgenden niedrigern Ziffern die übrigen drey Stücke, der Reihe nach, mit ihren niedrigsten Stellen anfangen.

§. 373. Anmerkung. In dem Bisherigen liegt der Grund zur wirklichen Ausziehung der Cubikwurzel aus allen vier, fünf und sechszifferigen Zahlen. Diese Rechnung hat übrigens viele Aehnlichkeit mit der Ausziehung der Quadratwurzeln und wird daher um so leichter hier durchgeführt werden können.

§. 374. Aufgabe. Aus einer Zahl, welche vier, fünf, oder sechs Ziffer enthält, die Cubikwurzel zu ziehen.

Auflösung. I. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in zwey Classen; so, daß die rechte Classe aus drey Ziffern besteht.

II. Man suche in dem Würfeltäfelchen (§. 366.) einen Cubus, welcher der größte ist, der von der linken Classe abgezogen werden kann, setze ihn unter diese Classe und subtrahire ihn wirklich. Die Cubikwurzel dieses Würfels ist der erste zu findende Wurzeltheil, welchen man zur Rechten der gegebenen Zahl nach einem Absönderungsstriche schreibt. Man kann ihn a nennen.

III. Da das Product $3a^2$ in der Stelle der Hunderte anfängt, so nehme man die vorhandenen Hunderte aus der gegebenen Zahl herunter und setze sie neben den in II.

IV. Man nehme daher das Quadrat des ersten Wurzeltheils dreymal und dividire mit diesem Dreyfachen in die vorhin erhaltene Zahl, so ist der Quotient der zweyte Theil der Wurzel. Denn wenn man mit $3a^2$ in $3a^2b$ dividirt, so muß b zum Quotienten herauskommen.

V. Man bilde nunmehr das Product aus $3a^2$ in b wirklich, ziehe es ab, setze neben den etwaigen Rest die zunächst niedrigere Ziffer der gegebenen Würfelzahl, so muß in Demjenigen, was man hierdurch erhält, das folgende dreyfache Product oder $3ab^2$ enthalten seyn, da dasselbe seine niedrigste Stelle in den Zehnern hat.

VI. Nachdem man dieses Product $3ab^2$ in Zahlen gebildet und gehörig abgezogen hat, setze man neben den etwaigen Rest die niedrigste Ziffer der gegebenen Zahl, so muß in Demjenigen, was man hierdurch bekömmt, der Würfel des zweyten Theils enthalten seyn. Daher bilde man b^3 in Zahlen, ziehe das Product gehörig ab, so ist, wenn kein Rest übrig bleibt, die angegebene Zahl ein vollkommner Würfel, dessen genaue Wurzel man gefunden hat.

Die Richtigkeit dieser Vorschriften beruht auf den bisher entwickelten Sätzen. Einige besondere Fälle, welche bey der Ausziehung der Cubikwurzel eintreten, werden am Faßlichsten durch wirkliche Zahlenbeyspiele erläutert.

$a^3 = 1$

$3a^2 = 3$ | 58

27

315

$3ab^2 = 243$

729

$b^3 = 729$

000

19

171

19

361 Quadrat

19

3249

361

6859 Würfel

II. $\sqrt[3]{59|319}$ ($a+b$ 3 9

$a^3 = 27$

$3a^2 = 27$ | 323

$3a^2b =$ | 243

801

$3ab^2 = 729$

729

$b^3 = 729$

000

Probe.

39 Wurzel

39

351

117

1521 Quadrat

39

13689

4563

59319 Würfel

III. $\sqrt{614|125}$ ($a+b$ 8 5

$a^3 = 512$ |

$3a^2 = 192$ | 1021

$3a^2b = 960$

612

$3ab^2 = 600$

125

$b^3 = 125$

000

Probe.

$85 \times 85 \times 85 = 614125$

$a^3 = 512$

$3a^2 = 192 \mid 1929$

$3a^2b = 1728$

2018

$3ab^2 = 1944$

741

$b^3 = 729$

12 Rest.

Dieser Rest zeigt an, daß die gegebene Zahl 704981 kein vollkommener Würfel, sondern um 12 größer ist, als der Cubus von 89. Wenn man daher die gefundene Wurzel 89 zum Würfel erhebt und diesen Rest von 12 dazu addirt, so erhält man die angegebene Zahl wieder. Nämlich:

89 Wurzel

89

801

712

7921 Quadrat

89

71289

63368

704969 Würfel

12 Rest

704981 gegebene Zahl.

Durch ähnliche Rechnungen pflegt man die Probe über die Richtigkeit der gefundenen Wurzeltheile zu machen.

V. $\sqrt[3]{357|944}$ ($a+b$ / 71

$a^3 = 343$

$3a^2 = 147|149$

$3a^2b = 147$

24

$3ab^2 = 21$

34

$b^3 = 1$

33 Rest.

Probe.

$71 \times 71 \times 71 + 33 = 357944$

§. 375. Aufgabe. Die Stücke zu finden, woraus die Würfel mehrtheiliger Wurzeln bestehen.

Auflösung. I. Es sey $a + b + c$ eine dreytheilige Cubikwurzel, so kann sie dadurch in eine zweytheilige verwandelt werden, daß man $(a + b)$ als den ersten und c als den zweyten Theil betrachtet. Hier wird nun $(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b) c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a+b) c^2 + c^3$. Dieses heißt mit Worten: der Würfel jeder dreytheiligen Wurzel enthält sieben Stücke: 1.) den Würfel des ersten Theils; 2.) das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten; 3.) das dreyfache Product aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweyten; 4.) den Würfel des zweyten Theils; 5.) das dreyfache Product aus dem Quadrate der Summe des ersten und zweyten Theils in den dritten; 6.) das dreyfache Product aus der Summe des ersten und zweyten Theils in das Quadrat des dritten und 7.) den Würfel des dritten Theils.

II. Hätte die Wurzel vier Theile, so könnte man sie dadurch in eine zweytheilige verwandeln, daß die Sum-

me der drey ersten Theile den ersten, der vierte Theil aber den zweyten Theil bildet. Es ist nämlich $a + b + c + d = (a + b + c) + d$. Folglich $(a + b + c + d)^3 = [(a + b + c) + d]^3 = (a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^2 d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b) c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2 d + 3(a + b + c) d^2 + d^3$.

Auch hier ist es leicht, jedes dieser zehn Stücke in Worten auszudrücken.

III. Setzt man diese Entwickelungen für fünftheilige, sechstheilige, und überhaupt für vieltheilige Wurzeln fort, so entdeckt man bald das allgemeine Gesetz, nach welchem sich die Stücke, welche die Würfel vieltheiliger Wurzeln bilden, leicht bestimmen lassen. Es beruht auf folgenden Regeln:

A. So oft zur Wurzel ein neuer Theil kömmt, so wird der Würfel mit drey neuen Stücken vermehrt.

B. Die Würfel mehrtheiliger Wurzeln enthalten, der Ordnung nach, die Würfel aller einzelnen Wurzeltheile vom höchsten bis zum niedrigsten.

C. Zwischen jeden zwey unmittelbar auf einander folgenden Würfeln liegen zwey dreyfache Producte, wovon das erste ein Dreyfaches aus dem Quadrate der Summe aller vorhergehenden Wurzeltheile in den neuen, das zweyte aber ein Dreyfaches aus der Summe aller vorhergehenden Wurzeltheile in das Quadrat des neuen Wurzeltheiles ist.

§. 374. Zusatz. Auch läßt sich leicht nachweisen, daß die Stücke, woraus die Würfel mehrtheiliger Wurzeln bestehen, mit ihren niedrigsten Stellen in unmittelbar auf einander folgenden Ordnungen anfangen müssen.

Denn wenn man z. B. die dreytheilige Wurzel $a+b+c$ nach ihrem Stellen-Werthe betrachtet, so wird $a+b+c = a.10^2 + b.10^1 + c.10^0$, und die (nach §. 375. I.) in $(a+b+c)^3$ enthaltenen sieben Stücke sind folgende:

I. $a^3 = a^3.10^{2\times3} = a^3.10^6$.

II. $3a^2b = 3a^2.10^{2\times2}b.10^1 = 3a^2b.10^5$

III. $3ab^2 = 3a.10^2.b.10^2 = 3ab.10^4$

IV. $b^3 = b^3.10^{1\times3} = b^3.10^3$

V. $3(a+b)^2c = 3(a+b)^2.10^2.c.10^0 = 3(a+b)^2 c.10^2$

VI. $3(a+b)c^2 = 3(a+b).10^1.c^2.10^{0\times2} = 3(a+b)c^2.10^1$

VII. $c^3 = c^3.10^{0\times3} = c^3.10^0$

Daher sind diese niedrigste Ordnungen, der Reihe nach, diese: 10^6 oder 1000000; 10^5 oder 100000; 10^4 oder 10000; 10^3 oder 1000; 10^2 oder 100; 10^1 oder 10; 10^0 oder 1.

§. 375. Zusatz. Auch läßt sich hieraus bestimmen, wie hoch jedes dieser sieben Stücke sich erstrecken kann. Denn da der erste Wurzeltheil oder a höchstens $= 9$ ist, so wird $a^3 = a^3.10^6$ höchstens $= 729000000$ seyn. Wäre auch $b = 9$, so würde $3a^2b = 3.9^2.9.10^5 = 218700000$, sodann $3ab^2 = 3.9.9^2 = 21870000$ und $b^3 = b^3.10^3 = 9^3.10^3 = 729000$ seyn können u. s. w.

§. 376. Anmerkung. Die Betrachtungen des vor. §. auch bey mehrzifferigen Wurzeln durchzuführen, und die Würfel solcher Wurzeln in Zahlen aus ihren Bestandtheilen zusammenzusetzen, ist eine so lehrreiche als nützliche Uebung für Anfänger.

§. 377. Aufgabe. Wenn eine Zahl von sieben

theilig ihre Cubikwurzel seyn werde.

Auflösung. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, und gebe jeder Classe drey Ziffer, so hat die Cubikwurzel so viele Theile, als es Classen gibt, wenn gleich die linke Classe auch nur eine oder zwey Ziffer enthält.

Beweis. I. Wenn die gegebene Zahl aus sieben, acht oder neun Ziffern besteht, so muß ihre Cubikwurzel dreyzifferig seyn. Denn wenn sie nicht aus drey Ziffern bestehen sollte, so müßte sie deren weniger oder mehr enthalten. Nun ist aber die größte zweyzifferige Wurzel die Zahl 99, deren Würfel = 971299 ist; eine Zahl, welche nur sechs Ziffer enthält. Sollte aber die Cubikwurzel der gegebenen Zahl mehr als drey Ziffer haben, so müßte sie zum wenigsten = 1000 seyn. Allein der Würfel von 1000 ist 1000000000, eine Zahl von zehn Ziffern, welche größer ist, als die größte neunzifferige Zahl. Daher kann die Cubikwurzel einer Zahl von sieben, acht oder neun Ziffern weder weniger, noch mehr als dreyzifferig seyn, und muß daher gerade drey Ziffer haben.

II. Wenn man sich eine Zahl denkt, welche aus zehn, eilf, oder zwölf Ziffern besteht, so muß ihre Cubikwurzel vier Theile haben. Denn wenn dieß nicht wäre, so müßte sie aus drey oder aus fünf Theilen bestehen. Nun ist aber die größte dreyzifferige Zahl = 999 und ihr Würfel = 997002999, eine Zahl von neun Ziffern, welche kleiner als die angegebene zehn, eilf- oder zwölfzifferige ist. Sollte dagegen die zu findende Cubikwurzel fünf Ziffer haben, so müßte sie zum wenigsten = 10000 seyn, wovon der Würfel =

100000000000, d. h. eine Zahl von dreyzehn Ziffern ist, welche größer als die größte zwölfzifferige seyn muß. Daher hat die Cubikwurzel einer Zahl von zehn, eilf oder zwölf Ziffern nicht weniger und nicht mehr als vier Ziffer, d. h. sie muß vierzifferig seyn.

III. Wenn man diesen Beweis auf ähnliche Art fortsetzt, so ist klar, daß eine Zahl von dreyzehn, vierzehn oder fünfzehn Ziffern eine Cubikwurzel von fünf Ziffern haben muß. Hätte dagegen die gegebene Zahl sechszehn, siebenzehn oder achtzehn Ziffer, so müßte ihre Cubikwurzel sechszifferig seyn, u. s. w. Daher ist die Wahrheit des Lehrsatzes erwiesen.

§. 378. Aufgabe. Aus jeder gegebenen Zahl, welche mehr als sechs Ziffer enthält, die Cubikwurzel zu finden.

Auflösung. Man fange diese Rechnung gerade so an, wie oben §. 374. für die Ausziehung einer zweytheiligen Cubikwurzel gelehrt worden ist, und setze diese Operation auf ganz ähnliche Weise weiter fort, um die folgenden Wurzeltheile zu finden. Nachstehende Beyspiele werden dieses in ein helleres Licht setzen, als es durch weitläufige Regeln geschehen kann.

$a^3 = 1$

$3\,a^2 = 3 \mid 5$

$3\,a^2\,b = 3$

26

$3\,a\,b^2 = 3$

230

$b^3 = 1$

$3\,(a+b)^2 = 363 \mid 2298$

$3\,(a+b)^2\,c = 2178$

1209

$3\,(a+b)\,c^2 = 1188$

216

Probe. $c^3 = 216$

000

$116 \times 116 \times 116 = 1560896$

II. $\sqrt[3]{12 \mid 977 \mid 875} \left(\begin{matrix} a+b+c \\ 2\ \ 3\ \ 5 \end{matrix} \right.$

$a^3 = 8$

$3\,a^2 = 12 \mid 49$

$3\,a^2\,b = 36$

137

$3\,a\,b^2 = 54$

837

$b^3 = 27$

$3(a+b)^2 = 1587 \mid 8103$

$3(a+b)^2\,c = 7935$

1737

$3(a+b)\,c^2 = 1725$

125

$c^3 = 125$

000

Probe. $235 \times 235 \times 235 = 12977875$

$a^3 = 125$

$3a^2 = 75 \mid 333$

$3a^2b = 300$

334

$3ab^2 = 2460$

940

$b^3 = 64$

$3(a+b)^2 = 8748 \mid 8764$

$3(a+b)^2 c = 8748$

162

$3(a+b)c^2 = 162$

1

$c^3 = 1$

0

Probe.

$541 \times 541 \times 541 = 158340421$

IV. $\sqrt[3]{679|151|461} \left(\begin{matrix} a+b+c \\ 8\ 7\ 9 \end{matrix} \right.$

$a^3 = 512$

$3a^2 = 192 \mid 1671$

$3a^2b = 1344$

3275

$3ab^2 = 1176$

20991

$b^3 = 343$

$3(a+b)^2 = 22707 \mid 206484$

$3(a+b)^2 c = 204363$

21216

$3(a+b)c^2 = 21141$

751

$c^3 = 729$

22 Rest.

879 Wurzel

7911

6153

7032

772641 Quadrat

879

6953769

5408487

6181128

679151439 Würfel

22 Rest

679151461 Gegebene Zahl.

V. $\sqrt[3]{}$ 153|990|659|897 ($^{a+b+c+d}$ 5 3 6 0

$a^3 = 125$

$3a^2 = 75|289$

$3a^2b = 225$

649

$3ab^2 = 135$

5140

$b^3 = 27$

$3(a+b)^2 = 8427|51136$

$3(a+b)^2c = 50562$

5745

$3(a+b)c^2 = 5724$

219

$c^3 = 216$

$3(a+b+c)^2 = 861888|38$

$3(a+b+)c^2d = 0$

389

$3(a+b+c)d^2 = 0$

3897

$d^3 = 0$

3897 Rest

Probe. $(5360)^3 + 3897 = 153990659897$

wird gefunden, wenn man sowohl seinen Zähler als seinen Nenner zum Würfel erhebt, und jenen als den Zähler, diesen als den Nenner des neuen Bruches betrachtet.

Beweis. Der Würfel eines Bruches ist das Product, welches entsteht, wenn man diesen Bruch dreymal als Factor setzt. Indem dieses geschieht, wird aber sowohl der Zähler, als der Nenner zur dritten Potenz erhoben. Wäre z. B. $\frac{a}{b}$ der gegebene Bruch, so ist $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}$. Nähme man diesen Bruch $= \frac{2}{3}$, so würde dessen Würfel $= \frac{8}{27}$ seyn. Desgleichen ist der Würfel von $\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, der Würfel von $\frac{4}{9} = \frac{64}{729}$, der Würfel von $\frac{5}{12} = \frac{125}{1728}$, u. s. w.

§. 380. Zusatz. Hieraus folgt, daß der Würfel eines ächten Bruches kleiner ist, als der Wurzelbruch, aus welchem er entstand, denn die Multiplication eigentlicher Brüche unter sich bewirkt eine Verminderung jedes einzelnen Factors.

§. 381. Aufgabe. Aus einem gemeinen Bruche die Cubikwurzel zu ziehen.

Auflösung. Die Cubikwurzel des Zählers gibt den Zähler, und die Cubikwurzel aus dem Nenner gibt den Nenner des neuen Bruchs.

Beweis. Da das Ausziehen der Cubikwurzel das Entgegengesetzte von dem Erheben zur dritten Potenz ist, so muß auch bey der Ausziehung der Cubikwurzel aus einem Bruche das entgegengesetzte Verfahren von demjenigen Statt finden, was man anwendet, um

den Bruch zum Würfel zu erheben. Daher ist z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}; \text{ oder } \sqrt[3]{\frac{8}{512}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \text{ u. s. w.}$$

§. 382. Zusatz. Man kann sich bey der Ausziehung der Cubikwurzeln aus gewöhnlichen Brüchen das wirkliche Wurzelausziehen aus dem Zähler oder aus dem Renner ersparen. Es sey aus dem Bruche $\frac{a}{b}$ die Cubikwurzel zu finden, so ist $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{a^2 b}} = \frac{a}{\sqrt[3]{a^2 b}}$ d. h. wenn man den Zähler und Renner des gegebenen Bruches mit dem Quadrate des Zählers multiplicirt, so entsteht ein neuer Bruch, welchem dem vorigen gleich, und dessen Zähler ein vollkommener Würfel ist, wovon man die Wurzel sogleich findet. Auch könnte man sagen:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a\,b^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a\,b^2}}{b}.$$ Dies gibt die Regel: man multiplicire Zähler und Renner des gegebenen Bruchs mit dem Quadrate des Renners, so erhält man einen neuen Bruch, welcher dem vorigen am Werthe gleich, und dessen Renner ein vollständiger Würfel ist, wovon man die Wurzel leicht angeben kann.

§. 383. Lehrsatz. Wenn man eine ganze Zahl nebst einem ächten Bruche zum Würfel erhebt, so kann dieser Cubus keine reine ganze Zahl seyn.

Beweis. Es sey die gegebene ganze Zahl $= a$, der ächte Bruch $= \frac{n}{m}$ so ist $a + \frac{n}{m}$ die gegebene Wurzel, deren Würfel $= a^3 + 3a^2\frac{n}{m} + 3a\frac{n^2}{m^2} + \frac{n^3}{m^3}$ ist.

ein ächter und noch kleinerer Bruch seyn, und diese vier Stücke können zusammen keine reine ganze Zahl bilden. Beyspiele in Zahlen dienen zur nähern Erläuterung.

§. 384. Erklärung. Man denke sich irgend zwey unmittelbar auf einander folgende Zahlen aus der Reihe der natürlichen Zahlen: z. B. 4 u. 5 und bilde ihre Würfel, welche 64 und 125 sind. Nimmt man nun zwischen diesen eine beliebige Mittelzahl an, z. B. die Zahl 86, so kann die Cubikwurzel von 86 wenn sie genau anzugeben wäre, nichts anders seyn, als vier Ganze nebst einem ächten Bruche. Da aber diese vier Ganze nebst dem ächten Bruche, zum Würfel erhoben, keine reine ganze Zahl bilden können, nach dem vorigen §, so gibt es auch unter allen möglichen ächten Brüchen kein einziger, welcher, der Zahl 4 beygefügt, die genaue Cubikwurzel von 86 ausdrückte. Daher läßt sich die Cubikwurzel von 86 weder durch Ganze, noch durch Bruchtheile darstellen. Da man Zahlen, welche sich weder in Ganzen noch in Brüchen ausdrücken lassen, Irrational-Zahlen nennt, so ist $\sqrt[3]{86}$ eine solche irrationale Zahl.

§. 385. Zusatz. Hieraus erhellet, daß auch die Ausziehung der Cubikwurzeln auf Irrational-Zahlen führe, so wie sich dieselben bereits oben bey Ausziehung der Quadrat-Wurzeln gezeigt haben. Man sieht auch, daß durch Ausziehung der Cubikwurzeln eine größere Menge von Irrational-Zahlen, als durch Ausziehung der Quadratwurzeln entstehen. Denn das Quadrat von 4 ist 16, das Quadrat von 5 aber ist 25. Der Würfel

Cubikwurzeln aller Zahlen von 17 bis 24 einschließlich sind irrational; desgleichen auch die Cubikwurzeln aller Zahlen von 65 bis 124 einschließlich, welche eine weit größere Reihe als jene bilden. Auch befinden sich in der Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 nur 10 vollständige Würfel, nämlich 1, 8, 27 64, 125, 216, 343, 512, 729 u. 1000. Alle übrige Zahlen sind unvollkommene Würfel und geben irrationale Cubikwurzeln.

§. 386. Aufgabe. Aus gegebenen Zahlen, welche keine vollständige Würfel sind, die Cubikwurzeln durch Annährung so genau zu finden, als man will.

Auflösung. Der Gang und die Richtigkeit dieses Verfahrens geht am Einleuchtendsten aus folgenden Zahlenbeyspielen hervor.

I. $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\frac{5000}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{5000}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{\sqrt[3]{5000}}{10}$. Da nun $\sqrt[3]{5000}$ eine zweyzifferige Zahl ist, welche hier noch mit 10 dividirt werden muß, so erhält man $\sqrt[3]{5}$ in Ganzen und in Zehntel.

II. $\sqrt[3]{5} = \sqrt[31]{\frac{5000000}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{5000000}}{\sqrt[3]{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{5000000}}{100}$.

Da hier $\sqrt[3]{5000000}$ eine dreyzifferige Zahl ist, welche mit 100 dividirt werden muß, so erhält man $\sqrt[3]{5}$ nicht blos in Ganzen, sondern auch in Zehntel und in Hundertel.

III. $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\frac{5000000000}{1000000000}} = \frac{\sqrt[3]{5000000000}}{\sqrt[3]{1000000000}} =$

1000

vierzifferige Zahl gibt, welche man noch durch 1000 dividiren soll, so ergibt sich hieraus $\sqrt[3]{5}$ in Ganzen, Zehntel, Hundertel und Tausendtel.

IV. Hieraus ist klar, daß man auf diese Weise fortfahren könne, um $\sqrt[3]{5}$ in noch kleineren Decimalbrüchtheilen zu bestimmen. Die allgemeine Regel ist diese: Wenn man aus einer unvollständigen Cubikzahl die Cubikwurzel durch Annährung finden will, so hänge man so vielmal drey Nullen zur Rechten an die Zahl, als auf wie viele Decimalbruchstellen diese Wurzel gesucht werden soll, und befolge die Regeln für die Ausziehung vieltheiliger Cubikwurzeln, welche in den vorhergehenden II. gelehrt worden sind.

$\sqrt[3]{39|000|000|000|000}$ (a+b+c+d+e... = 3, 3 9 1 2...

$a^3 = 27$

$3a^2 = 27|1\ 20$

$3a^2b = 81$

390

$3ab^2 = 81$

3090

$b^3 = 27$

$3(a+b)^2 = 3267|30630$

$3(a+b)^2c = 29403$

12270

$3(a+b)c^2 = 8019$

42510

$c^3 = 729$

$3(a+b+c)^2 = 344763|417810$

$3(a+b+c)^2d = 344763$

730470

$3(a+b+c)d^2 = 1017$

7294530

$d^3 = 1$

$3(a+b+c+d)^2 = 34496643|72945290$

$3(a+b+c+d)e^2 = 68993286$

39520040

$3(a+b+c+d)e^2 = 40692$

394793480

$e^3 = 8$

394793472 Rest.

Probe.

3,3912

3,3912

67824

33912

305208

101736

101736

1150023744

33912

2300047488

1150023744

10350213696

3450071232

3450071232

38,999605206528

394793472

39,000000000000

Noch genauer ist

$\sqrt[3]{39} = 3,3912144....$

§. 387. Zusatz. Durch ähnliche Rechnungen findet man folgende Resultate:

1.) $\sqrt[3]{71} = 4{,}1408178\ldots$

2.) $\sqrt[3]{98} = 4{,}6104363\ldots$

3.) $\sqrt[3]{156} = 5{,}3832126\ldots$

4.) $\sqrt[3]{194} = 5{,}7889603\ldots$

5.) $\sqrt[3]{386} = 7{,}2810794\ldots$

6.) $\sqrt[3]{532} = 8{,}1028385\ldots$

7.) $\sqrt[3]{864} = 9{,}5244063\ldots$

8.) $\sqrt[3]{879} = 9{,}5792085\ldots$

9.) $\sqrt[3]{975} = 9{,}9159624\ldots$

10.) $\sqrt[3]{999} = 9{,}9966655\ldots$ u. s. w.

§. 388. Zusatz. Zur Erläuterung der Ausziehung der Cubikwurzeln aus gemeinen Brüchen mögen folgende Beyspiele dienen, welche ebenfalls auf irrationale Zahlen führen:

1.) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1{,}4422496\ldots}{1{,}5874011\ldots}$

2.) $\sqrt[3]{\frac{9}{11}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{11}} = \frac{2{,}0800837\ldots}{2{,}2239801\ldots}$

3.) $\sqrt[3]{\frac{61}{72}} = \frac{\sqrt[3]{61}}{\sqrt[3]{72}} = \frac{3{,}9364972\ldots}{4{,}1601676\ldots}$

4.) $\sqrt[3]{\frac{117}{5}} = \frac{\sqrt[3]{117}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{4{,}8909730\ldots}{1{,}7099759\ldots}$

5.) $\sqrt[3]{\frac{237}{16}} = \frac{\sqrt[3]{237}}{\sqrt[3]{16}} = \frac{6{,}1884628\ldots}{2{,}5198421\ldots}$

6.) $\sqrt[3]{\frac{1}{117}} = \frac{1}{\sqrt[3]{117}} = \frac{1}{4,8909730\ldots}$

Man sieht leicht, daß jeder dieser sechs erhaltenen Brüche, durch gehörige Division des Nenners in den Zähler, in einen Decimalbruch verwandelt werden kann.

§. 389. Zusatz. Da man sich, nach dem Obigen, bey dem Ausziehen der Cubikwurzeln aus gemeinen Brüchen, das Wurzelausziehen einmal ersparen kann, so mögen folgende Beyspiele zur nähern Erläuterung darüber dienen:

1.) $\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5\times49}{7\times49}} = \frac{\sqrt[3]{245}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{6,2573247\ldots}{7}$

2.) $\sqrt[3]{\frac{7}{10}} = \sqrt[3]{\frac{7\times100}{10\times100}} = \frac{\sqrt[3]{700}}{10} = \frac{8,8790400\ldots}{10}$

$= 0,8790400\ldots$

3.) $\sqrt[3]{\frac{6}{10}} = \sqrt[3]{\frac{6\times121}{10\times121}} = \frac{\sqrt[3]{726}}{10} = \frac{8,9876373\ldots}{11}$

4.) $\sqrt[3]{\frac{4}{13}} = \sqrt[3]{\frac{4\times169}{13\times169}} = \frac{\sqrt[3]{676}}{13} = \frac{8,7763829\ldots}{13.}$

Auch können gemeine Brüche zuerst in Decimalbrüche verwandelt werden, aus welchen man sodann die Cubikwurzeln nach dem folgenden §. findet.

§. 390. Zusatz. Da man öfters die Cubikwurzeln aus Decimalbrüchen finden muß, so ist eine Anweisung dazu nöthig. Diese Rechnung wird sehr einfach, wenn man die gegebenen zehntheiligen Brüche in gemeine

Brüche verwandelt, und aus diesen nach den gegebenen Regeln die Cubikwurzeln findet. Folgende Beyspiele werden dieses näher erläutern:

1.) $\sqrt[3]{0,328} = \sqrt[3]{\frac{328}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{328}}{10} =$

$\frac{6,8964344\ldots}{10} = 0,68964344\ldots$

2.) $\sqrt[3]{0,68} = \sqrt[3]{\frac{680}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{680}}{10} =$

$\frac{8,7936593\ldots}{10} = 0,87936593\ldots$

3.) $\sqrt[3]{0,9} = \sqrt[3]{\frac{900}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{900}}{10} = \frac{9,6548938\ldots}{10}$

$= 0,96548938\ldots$

4.) $\sqrt[3]{59,319} = \sqrt[3]{\frac{59319}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{59319}}{10} = \frac{39}{10}$

$= 3,9$

5.) $\sqrt[3]{614,125} = \sqrt[3]{\frac{614125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{614125}}{10} =$

$\frac{85}{10} = 8,5$

6.) $\sqrt[3]{0,357911} = \sqrt[3]{\frac{357911}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{357911}}{100}$

$= \frac{71}{100} = 0,71$

7.) $\sqrt[3]{0,0038} = \sqrt[3]{\frac{3800}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{3800}}{100}$.

8.) $\sqrt[3]{17,43} = \sqrt[3]{\frac{1743}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{1743}}{10}$.

9.) $\sqrt[3]{354,6} = \sqrt[3]{\frac{354600}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{354600}}{10}$.

10.) $\sqrt[3]{0,4235627} = \sqrt[3]{\frac{423562700}{1000000000}} = \frac{\sqrt[3]{423562700}}{100}$.

11.) $\sqrt[3]{3426,0841} = \sqrt[3]{\frac{3426084100}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{3426084100}}{100}$.

§. 391. **Anmerkung.** Die Anwendungen von der Ausziehung der Cubikwurzel sind sehr mannigfaltig. Es sollen hier nur einige davon beygebracht werden.

I. Die Körperlehre beweiset, daß der Inhalt eines Würfels gefunden wird, wenn man das Maas seiner Seite zweymal mit sich selbst multiplicirt. Wenn z. B. diese Seite 5 Zolle in der Länge betrüge, so würde der Würfel $5 \times 5 \times 5$ d. h. 125 Cubikzolle (Würfelzolle) enthalten. Gesetzt nun, man sollte die Seite eines Würfels berechnen, welcher noch einmal so groß, als der gegebene wäre. Da $125 \times 2 = 250$ ist, so betrüge dessen Inhalt 250 Cubikzolle, und die Seite dieses Würfels wäre $= \sqrt[3]{250} = 6,2996052\ldots$ Zolle. — Sollte die zufindende Seite zu einem Würfel gehören, welcher nur $\frac{1}{5}$ des gegebenen betrüge, so wäre sein Inhalt $= \frac{125}{5} = 25$ und dessen Seite $= \sqrt[3]{25} = 2,9240177\ldots$

— Weil jede Zahl als das Maas der Seite eines Würfels betrachtet werden kann, welches, zweymal mit sich multiplicirt, dessen Inhalt darstellt, so wurde die Benennung: Würfel aus der Geometrie in die Arithmetik übertragen,

Zahl 3 hat.

II. In der Geometrie wird bewiesen, daß sich die Körperräume der Kugeln wie die Würfel ihrer Durchmesser verhalten. Wäre z. B. der eine Durchmesser noch einmal so groß, als der andere, so würde der Inhalt jener Kugel achtmal so groß, als der Inhalt von dieser seyn. Nennt man die Kugeln K und k, ihre Durchmesser D und d, und setzte z. B. $D : d = 3 : 1$, so wäre auch $K : k = 3^3 : 1^3$, d. h. $K : k = 27 : 1$. Für $D : d = 3 : 2$ wäre $K : k = 27 : 8$. Für $D : d = \frac{5}{6} : \frac{3}{4}$ wäre $K : k = \frac{125}{216} : \frac{27}{64} = 125 \times 64 : 27 \times 216 = 1000 : 729$, u. s. w. —

In welchem Verhältnisse stehen die Durchmesser zweyer Kugeln, deren Inhalte sich wie 10 : 7 verhalten? — Hier ist $K : k = 10 : 7$; allein $K : k = D^3 : d^3$; folglich auch $= 10 : 7 = D^3 : d^3$ und daher $D : d = \sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{7}$. Da nun $\sqrt[3]{10} = 2,1544347$ und $\sqrt[3]{7} = 1,9129312$ ist, so verhalten sich die Durchmesser dieser Kugeln, wie 2,1544347 : 1,9129312. Wäre z. B. der Durchmesser der ersten = 2 Ruthen, 1 Schuh, 5 Zolle, 4 Linien, 4 Puncte, so würde der Durchmesser der andern 1 Ruthe, 9 Schuhe, 1 Zoll, 2 Linien, 9 Puncte betragen.

III. Der Inhalt einer Kugel verhält sich nach einem Lehrsatze der Stereometrie zu dem Inhalte eines Würfels, in welchen jene Kugel so gestellt werden kann, daß sie ihn mit ihrer Oberfläche in den Mittelpuncten seiner sechs Seitenflächen berührt = 157 : 300. Nun sey der Inhalt einer gegebenen Kugel = k, wie groß ist die Seite eines Würfels, in welchen diese Kugel ganz genau gestellt werden kann? Da sich hier $157 : 300 = k : d^3$ verhält, wenn d die Seitenlinie des zufindenden Würfels ist, so wird $d^3 = \frac{300 \times k}{157}$ und daher $d = \sqrt[3]{\frac{300 \times k}{157}}$. Nähme man z. B. $k = 157$ Cubikfuß, so würde nun $d = \sqrt[3]{\frac{300 \times 157}{157}} = \sqrt[3]{300} = 6,694....$ d. h. d = 6 Fuß, 6 Zolle, 9 Linien und 4 Puncte. Für andere Werthe von k, kann d sehr leicht berechnet werden.

IV. Man soll eine Zahl finden, deren Quadrat mit dem

Quadrat, $\frac{x}{3}$ ihr Drittheil und $x^2 \times \frac{x}{3}$ das Product aus beyden. Da nun dieses Product die Zahl 1125 bilden soll, so hat man den Ausdruck: $x^2 \times \frac{x}{3} = 1125$, oder $\frac{x^3}{3} = 1125$. Multiplicirt man beyderseits mit 3, so wird $x^3 = 1125 \times 3 = 3375$, folglich $x = \sqrt[3]{3375} = 15$. Daher ist 15 die gesuchte Zahl, und man hat wirklich $15 \times 15 \times \frac{15}{3} = 1125$.

V. Eine Zahl zu finden, deren vierte Potenz durch die Hälfte jener Zahl dividirt, und zu dem Quotienten 11 addirt, die Summe 443 bildet. — Es sey x die unbekannte Zahl, so ist x^4 ihre vierte Potenz, $\frac{x}{2}$ ihre Hälfte und $x^4 : \frac{x}{2} = x4 \times \frac{2}{x} = \frac{2x^4}{x} = 2x^3$. Daher hat man nach der Foderung der Aufgabe $2x^3 + 11 = 443$. Subtrahirt man beyderseits 11 und dividirt sodann mit 2, so wird $x^3 = \frac{443 - 11}{2} = \frac{432}{2} = 216$, d. h. $x^3 = 216$, folglich $x = \sqrt[3]{216} = 6$. — Wirklich ist nun auch $\frac{6 \times 6 \times 6 \times 6}{\frac{1}{2}6} + 11 = 443$, wie gefodert wurde.

§. 392. Anmerkung. I. Da die dritte Potenz von $a + b$, oder $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ist, so wird man die vierte Potenz, oder $(a + b)^4$ durch folgende Rechnung erhalten

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$a + b$

$a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$
$a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = (a + b)^4$

Die vierte Potenz einer zweytheiligen Wurzel enthält daher folgende fünf Stücke:

1. Die vierte Potenz des ersten Theils,
2. Das vierfache Product aus dem Würfel des ersten Theils in den zweyten Theil,

4. Das vierfache Product aus dem ersten Theil in den Würfel des zweyten Theils, und
5. Die vierte Potenz des zweyten Theils.

II. Die hier gefundene Formel enthält die allgemeine Regel zur Ausziehung der Wurzel der vierten Potenz (man nennt sie auch Biquadratwurzel) aus einer Zahl von fünf, sechs, sieben oder acht Ziffern, und, wenn man sie weiter fortsetzt, auch von mehreren Ziffern. Die Abtheilung in Classen geschieht hier von der Rechten zur Linken dergestalt, daß vier Ziffer eine Classe bilden. Die letzte Classe zur Linken kann aus einer, aus zwey, oder auch aus drey, oder aus vier Ziffern bestehen. Uebrigens ist der Gang der Rechnung jenem sehr ähnlich, welcher bey Ausziehung der Cubikwurzeln erklärt wurde. Anfängern ist die Berechnung einiger Beyspiele sehr zu empfehlen.

§. 393. Anmerkung. I. Für die Ausziehung der Wurzel der fünften Potenz ist die Formel diese:

$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

II. Für die Wurzelausziehung der sechsten Potenz wird sie:

$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Für noch höhere Potenzen kann dieselbe leicht berechnet werden.

Fünfte Abtheilung.

Von den Progressionen.

§. 394. Erklärung. Wenn eine Reihe von Zahlen nach einem bestimmten Gesetze des Größer- oder Kleinerwerdens fortscheitet, so wird sie eine Progression genennt, z. B.

1 3 5 7 9 11 13 15 u. s. w.

1 4 7 10 13 16 19 22 u. s. w.

20 18 16 14 12 10 8 6 u. s. w.

30 27 24 21 18 15 12 9 u. s. w.

1 2 4 8 16 32 64 128 u. s. w.

1 3 9 27 81 243. u. s. w.

1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{64}$ u. s. w. oder all, gemein ausgedrückt:

a, a + d, a + 2 d, a + 3 d, a + 4d, a + 5d u. s. w.

a, a — d, a — 2 d, a — 3 d, a — 4d, a — 5d u. s. w.

a a b ab^2 ab^3 ab^4 ab^5 u. s. w.

Die einzelnen Größen, woraus diese Progressionen entstehen, werden die Glieder derselben genennt, und die Anzahl derselben heißt die Gliederzahl.

§. 395. Erklärung. Die Progressionen heißen steigende, wenn die folgenden Glieder immer größer werden; fallende Progressionen dagegen, wenn die nachfolgenden Glieder am Werthe abnehmen. Die Beyspiele des vorigen §. erläutern Beydes.

§. 396. Erklärung. Die Progressionen sind entweder arithmetische oder geometrische. Jene sind solche, bey welchen jedes folgende Glied um die nämliche Größe größer oder kleiner, als das unmittelbar vorhergehende ist; bey diesen aber ist jedes nachfolgende Glied gleichvielmal größer oder kleiner, als das unmittelbar vorhergehende. Auch diese Begriffe werden durch obige Beyspiele erläutert.

§. 397. Zusatz. Wenn man das erste Glied einer Progression a nennt, und unter d irgend eine ganze Zahl versteht, so ist der allgemeine Ausdruck jeder arithmetischen Progression folgender:

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d$ u. s. w.

der allgemeine Ausdruck einer geometrischen Progression aber dieser:

$a \quad ad \quad ad^2 \quad ad^3 \quad ad^4 \quad ad^5 \quad ad^6 \quad ad^7$ u. s. w.

Werden diese Progressionen rückwärts gelesen, so sind sie fallende. Setzt man sie aber noch weiter als auf das erste Glied fort, so entstehen folgende zwey Reihen:

$a - d, a - 2d, a - 3d, a - 4d, a - 5d$ u. s. w.

$\frac{a}{d} \quad \frac{a}{d^2} \quad \frac{a}{d^3} \quad \frac{a}{d^4} \quad \frac{a}{d^5}$ u. s. w.

§. 398. Zusatz. Hieraus folgt, daß in der arithmetischen Progression, so wie in der geometrischen, jede drey unmittelbar auf einander folgende Glieder eine stetige Proportion bilden, z. B.

$a - a + d = a + d - a + 2d$

$a + d - a + 2d = a + 2d - a + 3d$

$a + 2d - a + 3d = a + 3d - a + 4d$ u. s. w.

$a : ad = ad : ad^2$

$ad : ad^2 = ad^2 : ad^3$

$ad^2 : ad^3 = ad^3 : ad^4$ u. s. f.

§. 399. Zusatz. Da auf diese Weise die Progressionen aus stetigen Proportionsgliedern bestehen, so hat man auch das Zeichen des arithmetischen und geometrischen Verhältnisses zur Bezeichnung der arithmetischen und geometrischen Progressionen angewandt. Daher werden dieselben auf folgende Weise dargestellt:

$$\ldots(a-4d)-(a-3d)-(a-2d)-(a-d)-a-(a+d)$$
$$-(a+2d)-(a+3d)-(a+4d)\ldots$$

$$\ldots \frac{a}{d^5} : \frac{a}{d^4} : \frac{a}{d^3} : \frac{a}{d^2} : \frac{a}{d} : a : ad : ad^2 : ad^3 : ad^4 : ad^5 \ldots$$

Hieraus sieht man, daß in dieser arithmetischen Progression, wenn man sie rückwärts weit genug fortsetzt, negative Glieder erscheinen werden, so wie man bey gehöriger Fortsetzung der geometrischen Progression Bruch-Glieder erhalten wird. Folgende Zahlenbeyspiele werden dieses erläutern:

$$\ldots(-7)-(-5)-(-3)-(-1)-1-3-5-7-9-11$$
$$-13\ldots$$

$$\ldots \tfrac{1}{64} : \tfrac{1}{32} : \tfrac{1}{16} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 \ldots$$

§. 400. Erklärung. Da bey der arithmetischen Progression vorzüglich auf fünf Größen Rücksicht genommen wird; nämlich: auf das erste Glied, auf den Unterschied der Glieder, auf die Gliederzahl, auf das letzte Glied, und endlich auf die Summe aller Glieder, so ist man übereingekommen, dieselben, in angeführter Ordnung, durch die Buchstaben:

a, d, n, u, und s zu bezeichnen.

§. 401. Lehrsatz. Die Natur der arithmetischen Progression ist bestimmt, wenn ihr erstes Glied und die Differenz ihrer Glieder bestimmt wird.

Beweis. Denn da jedes der folgenden Glieder durch das nächstvorhergehende und durch die Differenz

sem Gliede beyfügt, in der fallenden aber von demselben wegnimmt, so erhält jedes der folgenden Glieder hierdurch die genaue Bestimmung seines Werthes. Beyspiele darüber sind leicht anzugeben.

§. 402. Lehrsatz. Das letzte Glied einer gegebenen arithmetischen Progression wird gefunden, wenn man zum ersten Gliede das Product aus der Differenz in eine Zahl setzt, welche der Anzahl aller Glieder weniger eins gleich ist; oder $u = a + (n - 1)\,d$.

Beweis. Aus dem Begriffe der arithmetischen Progression folgt, daß das zweyte Glied eine Summe aus dem ersten Gliede und aus der Differenz; das dritte Glied eine Summe aus dem ersten Gliede und aus der zweyfachen Differenz; das vierte Glied eine Summe aus dem ersten Gliede und aus der dreyfachen Differenz ist u. s. w. Wenn daher die Zahl aller Glieder der Reihe $= n$ ist, so muß ihr letztes Glied das $n - 1$ fache der Differenz, d. h. $(n-1)\,d$ enthalten und somit $= a + (n-1)\,d$ seyn.

Beyspiel. Es sey das erste Glied der Reihe $= 2$, die Differenz der Glieder $= 3$, die Zahl der Glieder $= 11$, so ist $u = 2 + (11 - 1) \times 3 = 2 + 10 \times 3 = 2 + 30 = 32$. Wenn man die Reihe wirklich bildet, so kann man sich leicht von der Richtigkeit dieses Werthes practisch überzeugen. Nämlich:

2—5—8—11—14—17—20—23—26—29—32.

Wäre das erste Glied 6, die Differenz 4 und die Gliederzahl 11, so würde das letzte Glied oder $u = 6 + (11-1) \times 4 = 6 + 10 \times 4 = 6 + 40 = 46$. Die Reihe wäre hier diese:

6—10—14—18—22—26—30—34—38—42—46.

§. 403. Zusatz. Da der Werth von u durch die

aus auch den Werth für a durch u, n und d; den Werth von d durch u, a und n, und den Werth von n durch u, a und d bestimmen können. Wenn man nämlich in dem Ausdrucke $u = a + (n-1)d$ auf beyden Seiten die Größe $(n-1)d$ subtrahirt, so erhält man $a = u - (n-1)d$; d. h. das erste Glied der Progression wird gefunden, wenn man vom letzten Gliede ein Product abzieht, welches zum einen Factor die Differenz, zum andern aber die um eins verminderte Zahl aller Glieder hat. Zur Erläuterung dienet die Reihe:

$4 - 7 - 10 - 13 - 16 - 19 - 22 - 25 - 28 - 31,$

worin $a = 31 - (10-1) \times 3 = 31 - 9 \times 3 = 31 - 27 = 4$ wird, wie dieses hier wirklich der Fall ist.

§. 404. Zusatz. Um aus dem Ausdrucke $u = a + (n-1)d$ den Werth von d zu finden, subtrahire man beyderseits die Größe a, so wird $u - a = (n-1)d$, und wenn man nunmehr auf beyden Seiten mit $n-1$ dividirt, so erhält man $d = \frac{n-a}{n-1}$ d. h. der Unterschied der Glieder wird gefunden, wenn man vom letzten Gliede der Progression das erste abzieht und die Differenz mit der Anzahl der Glieder weniger eins dividirt. In der Progression des vorigen §. wird daher $d = \frac{31-4}{10-1} = \frac{27}{9} = 3$, wie dieses auch in jener Reihe der Fall ist.

§. 405. Zusatz. Soll man dagegen aus $u = a + (n-1)d$ den Werth von n finden, so dividire man beyderseits mit d, woraus $\frac{u}{d} = \frac{a}{d} + n - 1$ wird. Subtrahirt man ferner beyderseits $\frac{a}{d}$, so wird $\frac{u}{d} - \frac{a}{d}$

derseits $+ 1$, so wird $n = \frac{u-a}{d} + 1$, d. h. die Anzahl der Glieder wird gefunden, wenn man die Differenz des ersten Gliedes vom letzten mit der Differenz der Progression dividirt und zu diesem Quotienten 1 addirt. In der Progression des vorhergehenden §. ist daher $n = \frac{31-4}{3} + 1 = \frac{27}{3} + 1 = 9 + 1 = 10$, und jene Progression bestand wirklich aus zehn Gliedern.

§. 406. Anmerkung. Es ist den Anfängern zu rathen, sich in Berechnung mehrerer Beyspiele nach diesen Formeln zu üben, und dabey bald steigende, bald fallende Progressionen, theils mit positiven, theils mit negativen Gliedern zum Grunde zu legen.

§. 407. Lehrsatz. Die Summe aller Glieder der arithmetischen Progression wird gefunden, wenn man die Summe aus ihrem ersten und letzten Gliede mit der halben Anzahl ihrer Glieder multiplicirt; oder $s = (a + u)\frac{n}{2}$.

Beweis. Entweder ist die Anzahl aller Glieder eine gerade oder eine ungerade. In jedem dieser beyden Fälle ist die Summe vom ersten und letzten Gliede so groß, als die Summe vom zweyten und vorletzten Gliede, und diese wiederum so groß, als die Summe vom dritten und vorletzten Gliede; dergestalt, daß, wenn man auf diese Weise die fernern Gliederpaare, von den Enden der Progression gegen ihre Mitte hin addirt, ihre Summen alle gleich groß sind. Denn da alle Glieder der Progression das erste enthalten, das zweyte Glied aber eine Differenz mehr als das erste, dagegen das vorletzte Glied eine

Differenz weniger als das letzte enthält, u. s. w. so müssen diese Summen alle gleich seyn. Wenn nun die Gliederzahl n eine gerade Zahl ist, so hat man $\frac{n}{2}$ Gliederpaare; wäre n aber ungerad, so hätte man $\frac{n-1}{2}$ solcher Paare, und das mittlere Glied der Progression stände allein.

Da nun jedes dieser Gliederpaare $= a + u$ ist, so muß $(a + u) \times \frac{n}{2}$ die Summe aller dieser Paare, d. h. die Summe aller Glieder der Progression darstellen, wenn n eine gerade Zahl ist.

Ist die Anzahl der Glieder, oder n, ungerad, so hat man von den beyden Enden der Progression gegen die Mitte hin $\frac{n-1}{2}$ gleiche Paare von Gliedern, deren jedes $= a + u$ ist. Folglich ist ihre Summe $= (a+u) \frac{n-1}{2}$, oder auch $= (\frac{a+u}{2})\ (n - 1)$. Da nun das einzeln stehende mittlere Glied $= \frac{a+u}{2}$ ist, so wird die Summe der ganzen Progression $= (\frac{a+u}{2})\ (n-1) + \frac{a+u}{2}$

$= (\frac{a+u}{2})\ (n-1) + \frac{a+u}{2} \times 1 = \frac{a+u}{2} \times n - 1 + 1$

$= \frac{a+u}{2} \times n = (a+u) \frac{n}{2}$; so, daß auch hier die Regel des Lehrsatzes gilt.

Beyspiel. Die Progression sey: 4 — 7 — 10 — 13 — 16 — 19 — 22 — 25 — 28 — 31 — 34, so ist $s = (4 + 34) \times \frac{11}{2} = 38 \times \frac{11}{2} = 19 \times 11 = 209$, wie man auch wirklich findet, wenn die Glieder dieser Progression wie gewöhnlich addirt werden.

Wäre die Progression folgende: 3 — 5 — 7 — 9 — 11 — 13 — 15 — 17 — 19 — 21, so wäre die Summe ihrer Glieder oder $s = (3 + 21) \times \frac{10}{2} = 24 \times 5 =$

120, wie die wirkliche Summirung dieser Glieder lehrt.

§. 408. Zusatz. Gleichwie die Summe aller Glieder durch das erste und letzte Glied nebst der Gliederzahl bestimmt ist, so kann auch das erste Glied durch die Summe, durch die Gliederzahl und durch das letzte; das letzte Glied durch die Summe, durch die Gliederzahl und durch das erste, endlich auch die Gliederzahl durch die Summe, und durch das erste und letzte Glied berechnet werden. Wenn man nämlich in dem Ausdrucke $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ beyderseits mit $\frac{n}{2}$ dividirt, so ist $\frac{2s}{n} = a + u$; folglich, wenn auf beyden Seiten u abgezogen wird, $a = \frac{2s}{n} - u$, d. h. man erhält das erste Glied, wenn die doppelte Summe aller Glieder durch die Gliederzahl dividirt und von diesem Quotienten das letzte Glied subtrahirt wird. In der Progression des vorigen §. wird $a = \frac{2 \times 120}{10} - 21 = \frac{240}{10} - 21 = 24 - 21 = 3$, welches auch oben das erste Glied war.

§. 409. Zusatz. Aus dem im vorigen §. gefundenen Ausdrucke $\frac{2s}{n} = a + u$ erhält man durch beyderseitige Subtraction von a, den Werth von $u = \frac{2s}{n} - a$, d. h. man findet das letzte Glied, wenn man die doppelte Summe aller Glieder durch die Gliederzahl dividirt und vom Quotienten das erste Glied subtrahirt. In obigem Beyspiele ist $u = \frac{2 \times 120}{10} - 3 = \frac{240}{10} - 3 = 24 - 3 = 21$, welches auch oben das letzte Glied ist.

§. 410. Zusatz. Um endlich den Werth von n zu finden, dividire man in dem Ausdrucke $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ beyderseits mit $a + u$, so erhält man $\frac{s}{a+u} = \frac{n}{2}$ und, indem man auf beyden Seiten mit zwey multiplicirt, wird $n = \frac{2s}{a+u}$, d. h. die Gliederzahl wird gefunden, wenn die doppelte Summe aller Glieder mit der Summe des ersten und letzten Gliedes dividirt. In obiger Progression wäre daher $n = \frac{2 \times 120}{3 \times 21} = \frac{240}{24} = 10$. Auch hatte obige Progression wirklich 10 Glieder.

§. 411. Anmerkung. Auch hier ist zu rathen, daß sich die Anfänger, zur Erläuterung dieser allgemeinen Formeln, besondere Zahlenbeyspiele wählen, um dieselben sowohl auf steigende, als auf fallende Progressionen, sowohl bey positiven als bey negativen Gliedern wirklich anzuwenden.

§. 412. Zusatz. Stellt man die in den vorhergehenden §§. gefundenen acht Grundformeln zusammen, so gewähren sie folgende bequeme Uebersicht:

I. $u = a + (n - 1)\,d$,

II. $a = u - (n - 1)\,d$,

III. $d = \frac{u-a}{n-1}$ und

IV. $n = \frac{u-a}{d} + 1$; sodann

V. $s = (a + u)\frac{n}{2}$

VI. $a = \frac{2s}{n} - u$

VII. $u = \frac{2s}{n} - a$ und

VIII. $n = \frac{2s}{a+u}$.

§. 413. Zusatz. Diese Formeln können aber auf mehrfache Art mit einander verbunden werden. Da nämlich:

$\frac{a+u}{2}$

$a+(n-1)d = \frac{2s}{a+u}$ d. h. einen Ausdruck, worin die vier Größen: a, n, d und s vorkommen, von welchen je drey zusammen die vierte bestimmen. Daher gibt es diese vier Fälle:

a kann bestimmt werden durch n, d und s
n — — — — a, d — s
d — — — — a, n — s
s — — — — a, n — d

Die wirkliche Berechnung erzeugt folgende Werthe, deren Auffindung eine sehr nützliche Uebung für die Anfänger ist:

1. $a = \frac{s}{n} - (n-1)\frac{d}{2}$
2. $n = \frac{d-2a}{2d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \left[\frac{2a-d}{2d}\right]^2\right)}$*)
3. $d = \frac{2s-2an}{n(n-1)}$
4. $s = \frac{1}{2}n(2a+[n-1]d)$.

§. 414. Zusatz. Da nun ferner nach II. $a = u-(n-1)d$ und nach VI. $a = \frac{2s}{n} - u$ ist, so wird auch

---

$u-(n-1)d = \frac{2s}{n} - u$, in welchem Ausdrucke die vier Größen: u, n, d und s vorkommen, deren jede durch die drey übrigen bestimmt wird, welches vier Fälle gibt:

---

*) Die Entwickelung dieser Formel wird dem Anfänger, unter Leitung des Lehrers, verständlich werden. Eben dieses gilt auch von den noch folgenden Formeln.

d — — — u, n — s,
s — — — u, n — d.

Werden diese Werthe entwickelt, so erhält man:

1. $u = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$

2. $n = \frac{2u+d}{2d} - \sqrt{\left(\left[\frac{2u+d}{2d}\right]^2 - \frac{2s}{d}\right)}$

3. $d = \frac{2nu-2s}{n(n-1)}$

4. $s = \frac{n}{2}[2u-(n-1)d]$

§. 415. Zusatz. Endlich hat man noch nach IV. $n = \frac{u-a}{d} + 1$, und nach VIII. $n = \frac{2s}{a+u}$, folglich auch $\frac{u-a}{d} + 1 = \frac{2s}{a+u}$, in welcher Gleichung die vier Größen u, a, d und s vorkommen, deren drey die vierte wiederum bestimmen. Nämlich:

u ist bestimmbar durch a, d und s
a — — — u, d — s
d — — — u, a — s
s — — — u, a — d.

Die wirkliche Berechnung derselben gibt folgende vier Ausdrücke:

1. $u = -\frac{d}{2} + \sqrt{\left(2ds + \left[a - \frac{d}{2}\right]^2\right)}$

2. $a = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\left[u + \frac{d}{2}\right]^2 - 2ds\right)}$

3. $d = \frac{(u+a)(u-a)}{2s-u-a}$

4. $s = \frac{a+u}{2} + \frac{(u+a)(u-a)}{2d}$.

§. 416. Zusatz. Vergleicht man die in den vier letztern §§. erhaltenen Resultate, so ist klar, daß es

im Ganzen zwanzig verschiedene Formeln gibt, um aus irgend drey der fünf Größen: a, d, u, n und s jede der beyden übrigen durch Rechnung zu bestimmen. Alle hierbey mögliche Fälle sind in folgender Uebersicht enthalten:

Von diesen fünf Größen: a, d, u, n, s wird

gegeben a, d, u; gesucht n (§. 412, IV.) und s (§. 415, 4.)
—— a, d, n; —— u (§. 412, I.) — s (§. 413, 4.)
—— a, d, s; —— u (§. 415, 1.) — n (§. 413, 2.)
—— a, u, n; —— d (§. 412, III.) — s (§. 412, V.)
—— a, u, s; —— d (§. 415, 3.) — n (§. 412, VIII.)
—— a, n, s; —— d (§. 413, 3.) — u (§. 412, VII.)
—— d, u, n; —— a (§. 412, II.) — s (§. 414, 4.)
—— d, u, s; —— a (§. 415, 2.) — n (§. 414, 2.)
—— d, n, s; —— a (§. 413, 1.) — u (§. 414, 1.)
—— u, n, s; —— a (§. 412, VI.) — d (§. 414, 3.)

§. 417. Anmerkung. Es ist sehr zu empfehlen, daß sich die Anfänger in der wirklichen Berechnung dieser 20 Formeln durch Zahlenbeyspiele üben. Einige Anwendungen von dieser Lehre der arithmetischen Progressionen auf mancherley Fragen sind in den nachfolgenden Aufgaben enthalten.

§. 418. I. Aufgabe. Man soll die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n finden; d. h. die Summe von $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \ldots\ldots + n$, wo man sich unter n irgend eine beliebige ganze Zahl vorstellt.

Auflösung. Da es hier darauf ankömmt, die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression zu finden, deren erstes und letztes Glied, nebst der Gliederzahl bekannt ist, so gilt die Formel: s =

$(a + u)\frac{n}{2}$. Da nun hier $a = 1$ und $u = n$ ist, so wird $s = (1 + n)\frac{n}{2} = \frac{n + n^2}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$.

Beyspiele. I. Daher ist die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20 soviel, als $\frac{20^2 + 20}{2} = \frac{400 + 20}{2} = \frac{420}{2} = 210$. Wirklich ist auch $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$.

II. Die Summe aller aufeinander folgenden Zahlen von 1 bis 50 wird $= \frac{50^2 + 50}{2} = \frac{2500 + 50}{2} = \frac{2550}{2} = 1275$:

III. Die Summe aller unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen von 1 bis 100 ist somit $= \frac{100^2 + 100}{2} = \frac{10000 + 100}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$ u. s. f.

§. 419. II. Aufgabe. Man soll die Summe aller ungeraden Zahlen: $1 + 3 + 5 + 7$ u. s. w. bis zur n^{ten} ungeraden Zahl finden.

Auflösung. Nennt man die n^{te} ungerade Zahl $= n$, so ist $u = a + (n - 1)d = 1 + (n - 1)\,2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$. Da nun $s = (a + u)\frac{n}{2}$, so wird hier $s = (1 + 2n - 1)\frac{n}{2} = 2n \times \frac{n}{2} = n^2$.

Beyspiele. I. Daher ist die Summe der ersten 10 ungeraden Zahlen, von 1 anfangend, $= 10^2 = 100$. Wirklich ist $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$.

III. Die Summe der ersten 1000 ungeraden Zahlen ist $= 1000^2 = 1000000$ u. s. w.

§. 420. Anmerkung. Folglich ist:

$1 + 3 = 2^2 = 4$
$1 + 3 + 5 = 3^2 = 9$
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 = 16$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 = 25$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2 = 36$ u. s. f.

§. 421. III. Aufgabe. Die Summe aller geraden Zahlen: $2 + 4 + 6 + 8$ u. s. f. bis zur n^{ten} geraden Zahl zu finden.

Auflösung. Da hier die n^{te} gerade Zahl $= u$ ist, so wird $u = 2 + (n - 1)2 = 2 + 2n - 2 = 2n$. Setzt man diesen Werth in $s = (a + u)\frac{n}{2}$, so wird $s = (2 + 2n)\frac{n}{2} = \frac{2n + 2n^2}{2} = n + n^2 = n^2 + n$ oder $(n + 1)n$.

Beyspiele. I. Die Summe der ersten acht geraden Zahlen, von 2 anfangend, ist demnach $= 8^2 + 8 = 64 + 8 = 72$. Wirklich ist auch $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72$.

II. Die Summe der ersten 100 ungeraden Zahlen, mit 2 anfangend, beträgt $100^2 + 100 = 100\,100$ u. s. f.

§. 422. IV. Aufgabe. Ein Brunnen ist 30 Ellen tief; für die erste Elle zu graben gab man 20 Kr. für jede folgende Elle 10 Kr. mehr. Wieviel für alle?

Auflösung. Hier ist $a = 20$, $d = 10$ und $n = 30$. Man soll s finden? Da nun (nach §. 413 n° 4) $s = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)d)$, so wird hier $s = \frac{30}{2}$

$(2 \times 20 + (30 - 1) \times 10) = 15\,(40 + 290) =$
$15 \times 330 = 4950$ Kr. $= 82$ fl. 30. Kr.

§. 423. V. Aufgabe. Auf einem dreyeckig zugespitzten Dache befinden sich 24 Reihen von Ziegeln; dergestalt, daß oben 3, dann 5, dann 7 u. s. w. neben einander liegen. Wieviele befinden sich in der untersten Reihe, und wieviele auf dem ganzen Dache?

Auflösung. Hier ist $a = 3$, $d = 2$ und $n = 24$; folglich wird $u = a + (n - 1)\,d = 3 + (24 - 1) \times 2 = 3 + 23 \times 2 = 3 + 46 = 49$. Daher befinden sich in der untersten Reihe 49 Ziegeln. Da nun $s = (a + u)\,\frac{n}{2}$, so wird hier $s = (3 + 49)\,\frac{24}{2} = 52 \times 12 = 624$ für die Gesammtzahl aller Ziegeln auf dem Dache.

§. 424. VI. Aufgabe. Ein Herr miethet einen Bedienten, und verspricht ihm an Lohn für das erste Jahr 30 fl., für jedes folgende Jahr aber $4\frac{1}{2}$ fl. mehr, als für das vorhergehende. Wieviel wird der Bediente das 17te Jahr nach dem Antritte seines Dienstes, und wieviel für alle 17 Jahre überhaupt erhalten?

Auflösung. Hier ist in der Progression: 30, $30 + 4\frac{1}{2}$, $30 + 9$, $30 + 13\frac{1}{2}$ .... das 17te Glied und sodann auch die Summe aller Glieder zu finden. Daher wird $u = a + (n - 1)\,d = 30 + (17 - 1)\,4\frac{1}{2} = 30 + 16 \times \frac{9}{2} = 30 + 72 = 102$ fl, als Lohn für das 17te Jahr. Weil nun $s = (a + u)\,\frac{n}{2}$, so wird $s = (30 + 102) \times \frac{17}{2} = 132 \times \frac{17}{2} = 66 \times 17 = 1122$ fl.

§. 425. VII. Aufgabe. Wenn 3500 fl. zu 4 Procent auf Zinsen gegeben werden und jedes Jahr 300 fl. zugelegt wird: wieviel betragen die sämmtlichen Zinsen von 24 Jahren?

Auflösung. Von 3500 fl. betragen die Zinsen am Ende des ersten Jahres $\frac{1}{25} \times 3500 = 140$ fl., und von 300 fl. betragen sie $\frac{1}{25} \times 300 = 12$ fl. Daher ist die Progression diese: 140; 140 + 12; 140 + 24; 140 + 36.... Da nun $n = 24$ ist, so wird $s = \frac{n}{2} \times (2a + (n-1)d) = \frac{24}{2} \times (2 \times 140 + (24-1)12) = 12 \times (280 + 23 \times 12) = 12 \times (280 + 276) = 12 \times 556 = 6672$ fl.

§. 426. VIII. Aufgabe. Ein Reisender, welcher nach 19 Tagen an seinem Bestimmungs-Orte zu seyn wünscht, beschleunigt seine Reise so sehr, daß er jeden Tag $\frac{1}{4}$ Meile mehr macht, als an dem vorhergehenden Tage. Wenn er nun den letzten Tag $14\frac{1}{2}$ Meilen zurücke legt: wie viele Meilen machte er den ersten Tag? Und wie viele Meilen beträgt seine ganze Reise?

Auflösung. Hier ist $d = \frac{1}{4}$, $u = 14\frac{1}{2}$ und $n = 19$; folglich $a = u - (n-1)d = 14\frac{1}{2} - (19-1) \times \frac{1}{4} = \frac{29}{2} - 18 \times \frac{1}{4} = \frac{29}{2} - \frac{18}{4} = \frac{58-18}{4} = \frac{40}{4} = 10$. Daher hat der Reisende täglich 10 Meilen zurückgelegt.

Da nun $s = (a + u)\frac{n}{2}$, so wird hier $s = (10 + 14\frac{1}{2}) \times \frac{19}{2} = (10 + \frac{29}{2}) \times \frac{19}{2} = \frac{49}{2} \times \frac{19}{2} = 232\frac{3}{4}$; d. h. sein ganzer Weg betrug $232\frac{1}{4}$ Meilen.

§. 427. IX. Aufgabe. Jemand, der nach seinem Gehalte gefragt wurde, antwortete: Jetzt habe ich 550 fl.; bey dem Antritte meines Amtes dagegen hatte ich nicht mehr, als 100 fl.; erhielt aber, meines Fleißes wegen, jedes Jahr eine Zulage von 30 fl. Wie lange ist dieser Mann schon im Amte?

Auflösung. Hier soll man aus u, a und d den

Werth von n finden, wozu die Formel $n = 1 + \frac{u - a}{d}$ dienet. Es ist nämlich $n = 1 + \frac{550 - 100}{30} = 1 + \frac{450}{30}$ $= 1 + 15 = 16$, d. h. er zählte 16 Dienstjahre.

Will man auch die Summe seiner ganzen Einnahme während dieser 16 Jahren wissen, so berechne man $s = (a + u)\frac{n}{2}$, welches hier $= (100 + 550) \times \frac{16}{2} = 650 \times 8 = 5200$ fl. gibt.

§. 428. X. Aufgabe. Ein Schuldner wird mit seinem Gläubiger einig, seine Schuld von 12950 fl., welche auf einmal zu bezahlen er sich ausser Stand sieht, in monatlichen Terminen abzutragen, und zwar den ersten Monat mit 600 fl., jeden folgenden Monat aber mit 50 fl. mehr. In wieviel Monaten wird er seine ganze Schuld abgetragen haben? Und wieviel hat er am letzten Monate zu entrichten?

Auflösung. Aus dem Sinn der Aufgabe geht hervor, daß man hier aus s, a und d die Werthe von n und von u berechnen soll.

Daher ist $n = \frac{d - 2a}{2d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \left[\frac{2a - d}{2d}\right]^2\right)} =$ $\frac{50 - 1200}{100} + \sqrt{\left(\frac{25900}{50} + \left[\frac{1200 - 50}{100}\right]^2\right)} = -\frac{115}{10} +$ $\sqrt{\left(518 + \frac{13225}{100}\right)} = -\frac{115}{10} + \frac{255}{10} = \frac{140}{10} = 14$; d. h. die Schuld wird nach Ablauf von 14 Monaten getilgt seyn.

Ferner ist $u = a + (n - 1)d = 600 + (14 - 1) \times 50 = 600 + 13 \times 50 = 600 + 650 = 1250$; d. h. die Zahlung im letzten Monate beträgt 1250 fl.

§. 429. XI. Aufgabe. Die Physik lehrt, daß jeder Körper, welcher im luftleeren Raume fällt, in der ersten Secunde seines Fallens einen Raum von un-

gefähr $15\frac{5}{8}$ rheinländische Fuße durchläuft, in jeder folgenden Secunde aber immer um $31\frac{1}{4}$ Fuß mehr, als in der zunächst vorhergehenden. Wenn nun ein Körper 20 Secunden lang gefallen ist: Wie viel Fuß wird er in der letzten Secunde zurücklegen? Und wieviele Fuße in der ganzen Zeit seines Falles?

Auflösung. Es ist klar, daß hier aus $a = 15\frac{5}{8}$, aus $d = 31\frac{1}{4}$ und aus $n = 20$ sowohl u als s berechnet werden soll.

Da nun $u = a + (n-1)d$, so wird nunmehr $u = 15\frac{5}{8} + (20-1) \times 31\frac{1}{4} = 609\frac{3}{8}$ Fuß für den Fallraum in der 20ten Secunde.

Ferner ist $s = (a + u)\frac{n}{2} = (15\frac{5}{8} + 609\frac{3}{8}) \times \frac{20}{2} = 6250$ Fuß für den ganzen Fallraum während 20 Secunden.

Fragte man hier noch: Wie lange muß der Körper fallen, um einen Raum von 4000 Fuß zu durchlaufen? so müßte aus $a = 15\frac{5}{8}$, aus $d = 31\frac{1}{4}$ und aus $s = 4000$ der Werth von n gefunden werden. Dies gibt

$$n = \frac{d - 2a}{2d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \left[\frac{2a-d}{2d}\right]^2\right)} = \frac{31\,1/4 - 2 \times 15\,5/8}{2 \times 31\,1/4}$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{2 \times 4000}{31\,1/4} + \left[\frac{2 \times 15\,5/8 - 31\,1/4}{2 \times 31\,1/4}\right]^2\right)} = 16 \text{ Secunden.}$$

§. 430. XII. Aufgabe. Als in einer Gesellschaft von häußlicher Oeconomie die Rede war, sagte Jemand: Ich habe in diesem Jahre 78 fl. erspart, auch mir überhaupt schon ein Vermögen von 1350 fl. gesammelt, und zwar dadurch, daß ich, seit dem Antritte meines Dienstes bis jetzt, alle Jahre 2 fl. mehr von meinem Gehalte zurücklegte. — Wie lange ist es, daß dieser Mann seinen Dienst erhielt? Und wieviel hatte er im ersten Jahre erspart?

Auflösung. Hier soll aus $u = 78$; $s = 1350$ und aus $d = 2$ der Werth von n und von a berechnet werden.

Demnach ist $n = \frac{2u+d}{2d} - \sqrt{\left(\left[\frac{2u+d}{2d}\right]^2 - \frac{2s}{d}\right)}$

$= \frac{2 \times 78 + 2}{2 \times 2} - \sqrt{\left(\left[\frac{2 \times 78 + 2}{2 \times 2}\right]^2 - \frac{2 \times 1350}{2}\right)} = 25$ Jahre.

Ferner wird $a = u - (n - 1)d = 78 - (25 - 1) \times 2 = 30$ Gulden.

§. 431. Anmerkung. Die 7 letztern Aufgaben sind aus der zu empfehlenden Schrift: Sammlung von Beyspielen aus der Buchstaben-Rechnung und Algebra von Meier Hirsch genommen, die Auflösungen aber hier beygefügt worden.

§. 432. Erklärung. Aus der Natur der geometrischen Progressionen geht hervor, daß man bey ihr fünferley Größen betrachten könne: das erste Glied, das letzte Glied, die Gliederzahl, die Summe aller Glieder und jene Zahl, welche andeutet, wie vielmal größer oder kleiner irgend ein Glied, als das zunächst vorhergehende ist. Man nennt sie den Exponenten der Progression und bezeichnet sie durch e. Für die vorhin genannten Größen bedient man sich wieder der Buchstaben: a, u, n und s.

§. 433. Lehrsatz. Die Natur der geometrischen Progressionen ist bestimmt durch ihr erstes Glied und durch den Exponenten.

Beweis. Da jedes der folgenden Glieder aus dem nächstvorhergehenden dadurch bestimmt wird, daß dasselbe entweder mit dem Exponenten multiplicirt oder dividirt werden muß, so ist klar, daß der Werth jedes Gliedes der ganzen Progression von der Größe des ersten Gliedes und des Exponenten abhänge.

$ae^3 \ldots\ldots ae^n$. Für $a = 3$ und $e = 2$ wird die Pro
greſſion folgende:

3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384, worin di
Größe jedes Gliedes bestimmt ist, sobald man nur weiß
an welcher Stelle es sich befindet.

§. 434. Lehrsatz. Das letzte Glied einer geo
metrischen Progression wird gefunden, wenn man da
erste Glied mit jener Potenz des Exponenten multiplicirt
deren Grad die Gliederzahl weniger 1 ist, oder $u = a \times e^{n-1}$.

Beweis. Jedes Glied der geometrischen Pro
gression ist ein Product aus dem ersten Gliede in ei
Potenz des Exponenten. Da nun in dem dritten Glie
e^2, in dem vierten Gliede e^3, im fünften Gliede e^4 u
folglich in dem n^{ten} Gliede e^{n-1} vorkömmt, so muß di
ses n^{te} Glied, wenn es u heißt, $= a \times e^{n-1}$ seyn.

Beyspiel. Es sey $a = 4$, $e = 2$, $n = 8$,
wird $u = 4 \times 2^{8-1} = 4 \times 2^7 = 4 \times 128 = 51$
Die Reihe ist folgende: 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 25
512. Wäre $a = 3$, $e = 4$, $n = 11$, so würde u =
$3 \times 4^{10} = 3145728$, und die Progression wäre:

3 : 12 : 48 : 192 : 768 : 3072 : 12288 : 4915
196608 : 786432 : 31457

§. 435. Zusatz. I. Da in der Formel des vorigen
die Größe u durch e, a und n bestimmt ist, so wird m
aus ihr mehrere andere, zur Bestimmung der Wer
von a und von e, ableiten können. Wenn man näml
in dem Ausdrucke $u = a \times e^{n-1}$ beyderseits mit e^n

dividirt, so wird $a = \frac{u}{e^{n-1}}$ d. h. man findet das e

Glied der geometrischen Progression, wenn ihr letztes Glied mit jener Potenz des Exponenten dividirt wird, deren Grad die Gliederzahl weniger eines ist.

II. Wird in eben dieser Formel $u = a \times e^{n-1}$ auf beyden Seiten mit a dividirt, so erhält man $\frac{u}{a} = e^{n-1}$ und durch das Wurzelausziehen vom Grade $n - 1$ wird $e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ d. h. der Exponent der Progression wird gefunden, wenn man das letzte Glied durch das erste dividirt und aus diesem Quotienten die Wurzel jenes Grades auszieht, welcher durch die Gliederzahl weniger 1 bestimmt wird.

Beyspiele. Die Reihe sey diese:

$a : ae : ae^2 : ae^3 : ae4 : ae^5 : ae^6 : ae7 : ae^8$,

so wird $a = \frac{u}{e^{n-1}} = \frac{ae^8}{e9-1} = \frac{ae^8}{e^8} = a$. Desgleichen

wird $e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \sqrt[9-1]{\frac{ae^8}{a}} = \sqrt[8]{\frac{ae^8}{a}} = \sqrt[8]{e^8} = e$.

Es ist leicht, sich diese allgemeine Beyspiele in bestimmten Zahlen zu erläutern.

§. 436. Anmerkung. Was in der Formel: $a = a \times e^{n-1}$ die Größe n für einen Werth habe, kann hier noch nicht bestimmt werden, weil dazu die Lehre von den Logarithmen, wovon die nächste Abtheilung handeln wird, nothwendig ist.

§. 437. Lehrsatz. Wenn man von dem letzten Gliede einer geometrischen Progression das erste Glied abzieht, und den Rest durch den um 1 verminderten Exponenten dividirt, so gibt der Quotient die Summe aller Glieder weniger dem letzten Gliede.

und das erste Glied $= \frac{a}{}$

folglich die Differenz $= ae^5 - a$.

Nun ist der Exponent weniger $1 = e - 1$. Dividirt man hier mit dieser letzten Differenz in die erste, so entsteht folgende Rechnung:

Divis.	Divid.
$e - 1$	$ae^5 - a$ $(ae^4 + ae^3 + ae^2 + ae + a$
	$ae^5 - ae^4$
	$ae^4 - a$
	$ae^4 - ae^5$
	$ae^3 - a$
	$ae^3 - ae^2$
	$ae^2 - a$
	$ae^2 - ae$
	$ae - a$
	$ae - a$
	0 0

wodurch die Wahrheit des Lehrsatzes allgemein erwiesen ist.

§. 438. Zusatz. Nennt man die Summe der Glieder $a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 = s$, so ist $s = \frac{ae^5 - a}{e - 1}$. — Hätte die Progression n Glieder, so wäre das n^{te} Glied $= a \times e^{n-1}$, und das $(n+1)^{te}$ wäre $= a \times e^n$. Folglich ist bey n Gliedern die Summe aller Glieder $= \frac{a.\, e^n - a}{e - 1}$ d. h. die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression wird gefunden, wenn man von dem Gliede, welches nach dem gegebenen letzten folgen

würde, das erste Glied subtrahirt und diese Differenz durch den um 1 verminderten Exponenten dividirt. So ist z. B. die Summe der Reihe : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 $=$ $\frac{512 \times 2 - 4}{2 - 1} = \frac{1024 - 4}{1} = 1020$. u. s. w.

§. 439. Zusatz. Aus dieser Formel $s = \frac{ae^n - a}{e - 1}$ folget die Bestimmung der Größe a durch s, n und e, so wie auch jene der Größe e durch s, a und u.

Da nämlich $s = \frac{ae^n - a}{e - 1} = \frac{e^n - 1}{e - 1} a$ ist, so wird $a = \frac{s \times (e - 1)}{e^n - 1}$ d. h. das erste Glied wird gefunden, wenn man die Summe aller Glieder mit dem um 1 verminderten Exponenten multiplicirt und dieses Product durch jene, um 1 verminderte Potenz des Exponenten dividirt, deren Grad die Gliederzahl ist.

Desgleichen findet man e folgendergestalt. Da $ae^{n-1} = u$ ist, so wird auch, in dem man beyderseits mit e multiplicirt, $ae^n = ue$. Setzt man diesen Werth von ae^n in die Gleichung $s = \frac{ae^n - a}{e - 1}$, so wird $s = \frac{ue - a}{e - 1}$; folglich, durch Multiplication mit $e - 1$, wird $se - s = ue - a$; daher, durch Addition von s und durch Subtraction von ue, wird ferner $es - eu = s - a$, oder auch $e(s - u) = s - a$, woraus denn $e = \frac{s - a}{s - u}$ folget; d. h. Man findet den Exponenten der Progression, wenn man mit dem Unterschiede aus der Summe aller Glieder we-

dividirt, welche entsteht, indem man vo
eben dieser Summe das erste Glied subtra
hirt.

Beyspiele. Es sey die Progression folgende

3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 . . . s

wird $a = \frac{s \times (e-1)}{e^n - 1} = \frac{3279 \times 3 - 1}{3^7 - 1} = 3$. Fe

ner ist $e = \frac{s'-s}{s-u} = \frac{3279-3}{3279-2187} = \frac{3276}{1092} = 3$.

§. 440. Zusatz. Durch schickliche Verbindun
der seither entwickelten Formeln lassen sich auch für d
geometrische Progression aus den Größen a, e, u,
und s zwanzig Ausdrücke finden, worin jede dies
fünf Größen durch drey der übrigen dargestellt wir
Sie sind folgende:

1.) Aus e, n, u wird $a = \frac{u}{e^{n-1}}$

2.) Aus e, n, s wird $a = \frac{s(e-1)}{e^n - 1}$

3.) Aus e, u, s wird $a = eu - (e-1)s$

4.) Aus n, u, s findet man die Gleichung: $a(s-a)^{n-}$
$- u(s-u)^{n-1} = 0$, worin der Werth von
hier nicht bestimmt werden kann.

5.) Aus a, n, u wird $e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$

6.) Aus a, u, s wird $e = \frac{s-a}{s-u}$

7.) Aus a, n, s findet man: $e^n - \frac{s}{a} e + \frac{s-a}{a} = 0$

8.) Aus n, u, s wird $e^n - \frac{s}{s-u} e^{n-1} + \frac{u}{s-u} = 0$

welche beyde Gleichungen hier nicht aufgelös
werden können.

10.) Aus a, e, s wird $u = \frac{a + s(e-1)}{e}$

11.) Aus e, n, s wird $u = \frac{s(e-1)e^{n-1}}{e^n - 1}$

12.) Aus a, n, s entsteht die Gleichung $u(s-u) - a(s-a)^{n-1} = 0$, deren Auflösung hier gegeben werden kann.

13.) Aus a, e, n wird $s = \frac{a(e^n - a)}{e-1}$

14.) Aus a, e, u wird $s = \frac{e^n - a}{e^{n-1}}$

15.) Aus a, n, u wird $s = \frac{u^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$

16.) Aus e, n, u wird $s = \frac{u(e^n - 1)}{(e-1)e^{n-1}}$. Die nachstehenden Formeln werden in der letzten Abtheilung dieser Schrift (Von den Logarithmen) erst vollkommen verständlich. Auch kann dort ihre Anwendung zur wirklichen Berechnung practischer Fälle gezeigt werden.

17.) Aus a, e, u wird $n = \frac{\log. u - \log. a}{\log. e} +$

18.) Aus a, e, s wird $n = \frac{\log. [a + (e-1)s] - \text{lo}}{\log. e}$

19.) Aus a, u, s wird $n = \frac{\log. u - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-u)}$

20.) Aus e, u, s wird $n = \frac{\log. u - \log. [eu - (e-1)s]}{\log. e} +$

§. 441. Anmerkung. Einige Anwendungen dieser Formeln sind in folgenden Aufgaben enthalten.

§. 442. I. Aufgabe. Ein Würfel-Spieler setzt auf den ersten Wurf 3 fl. und verliert. Er nimmt sich vor, seinen Einsatz zu verdoppeln und verliert wieder. Nachdem er achtmal hinter einander verdoppelt und verloren hatte, war sein ganzer Geldvorrath erschöpft. Wieviel betrug dieser?

Auflösung. Aus dem Sinn dieser Aufgabe geht hervor, daß die Summe einer geometrischen Progression gefunden werden soll, deren erstes Glied = 3, deren Exponent = 2 und deren Gliederzahl = 8 ist. Hier wird also $s = \frac{a.\ e^n - a}{e-1} = \frac{3 \times 2^8 - 3}{2-1} =$ $3 \times 256 - 3 = 765$. Der Spieler verlohr also im Ganzen 765 fl.

§. 443. II. Aufgabe. Derselbige Spieler setzt auf den ersten Wurf 2 fl. und gewinnt, bey immer verdoppeltem Satze, zehnmal nach einander. Wieviel hat er im zehnten Wurf allein genommen?

Auflösung. Hier soll aus a, e und n der Werth von u gefunden werden. Dies gibt $u = a.\ e^{n-1} =$ $2 \times 2^{10-1} = 2^{10} = 1024$ fl.

§. 444. III. Aufgabe. Wie hoch belief sich der ganze Gewinn eines Spielers, welcher mit 2 fl. Einsatz und steter Verdoppelung desselben zehnmal nach einander gewonnen hatte?

Auflösung. Hier ist aus a, e und u (des vor. §) der Werth von s zu bestimmen. Man erhält $s = \frac{e\,u - a}{e-1}$ $= \frac{2 \times 1024 - 2}{2-1} = 2048 - 2 = 2046$. Der ganze Gewinn betrug somit 2046 fl.

§. 445. IV. Aufgabe. Ein Spieler hat achtmal nach einander, bey immer fortgesetzter Verdoppelung

des ebenverlornen Geldes im Ganzen 765 fl. verloren. Wie hoch belief sich die erste Einlage?

Auflösung. Hier soll aus n, e und s die Größe von a bestimmt werden. Die Formel ist $a = \frac{s \times (e-1)}{e^n - 1} = \frac{765 \times 1}{2^8 - 1} = \frac{765}{256-1} = \frac{765}{255} = 3$.

§. 446. V. Aufgabe. Wenn jemand einen Pferdskauf unter der Bedingniß abschlösse, daß er dem Verkäufer für den ersten Hufnagel 1 Pfennig, für den zweyten 2 Pf. für den dritten 4 Pf. u. s. f. als Zahlung geben wollte. Wieviel betrüge bey zwey und dreyßig Hufnägeln der Kaufpreis des Pferdes?

Auflösung. Hier ist die Summe einer Progression zu finden, deren erstes Glied = 1, deren Exponent = 2 und deren Gliederzahl = 32 ist. Daher

$s = \frac{a.\ e^n - a}{e-1} = 1 \times 2^{32} - 1 = 2^{32} - 1 =$

4294967296 — 1 = 4294967295 Pfennige = 10737418 23 Kr. 3 Pf. = 17895697 fl. 3 Kr. 3 Pf.

§. 447. VI. Aufgabe. Der persische König Ardschir soll das Brettspiel erfunden haben, dessen Erfindung die Perser sehr hoch schätzten. Ihnen zum Trotze erfand der Indier Sessa das Schachspiel. Er theilte seinem Könige diese Erfindung mit, welcher ihm eine große Belohnung dafür zusicherte. Sessa begehrte für das erste Feld im Schachbrette ein Fruchtkorn, für das zweyte Feld zwey Körner, für das dritte vier Körner u. s. f. Da nun das Schachbrett 64 Felder enthält, so ist die Frage, wieviel die Zahl aller verlangten Fruchtkörner betrage?

Auflösung. Es ist klar, daß die Summe der Progression: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ... für 64 Glieder zu

$= 2^{64} - 1 =$ 18|446744|073709|551615. Se
man 491520 Fruchtkörner auf einen Sack, so betrü
diese Zahl 37|529996|804754 solcher Säcke, und we
dem Erfinder täglich eine Million solcher Säcke hätte a
geliefert werden sollen, so wäre man erst nach 1028
Jahren damit zu Ende gekommen.

Wäre die Oberfläche der Erde durchaus Ackerlan
so würden mehr als 70 Erndten erfoderlich seyn, u
obige Zahl von Fruchtkörnern zu erhalten.

§. 448. Aufgabe. Wenn in der geometrisch
Reihe a, ae, ae^2, ae^3 u. s. f. a eine ganze Zahl, d
Exponent e aber ein ächter Bruch ist, und die Zahl d
Glieder ins Unendliche geht, die Summe aller Pr
gressionsglieder zu finden.

Auflösung. Wenn e ein eigentlicher Bruch i
so werden die folgenden Progressionsglieder immer kl
ner, und wenn n eine ungeheuer große Zahl ist, so wi
das n^{te} Glied, oder $a \times e^{n-1}$ ungemein klein seyn u
man kann nunmehr dieses Glied $= 0$ setzen. Hierdur

wird $s = \frac{a \times e^n - a}{e - 1} = \frac{-a}{e-1}$; d. h. wenn m

Zähler und Renner dieses Bruchs mit -1 multiplicir

$s = \frac{a}{1-e}$ d. h. man findet die Summe solcher u
endlichen Reihen, wenn man das erste Glied durch d
Unterschied dividirt, welcher entsteht, indem der Exponen
von 1 abgezogen wird.

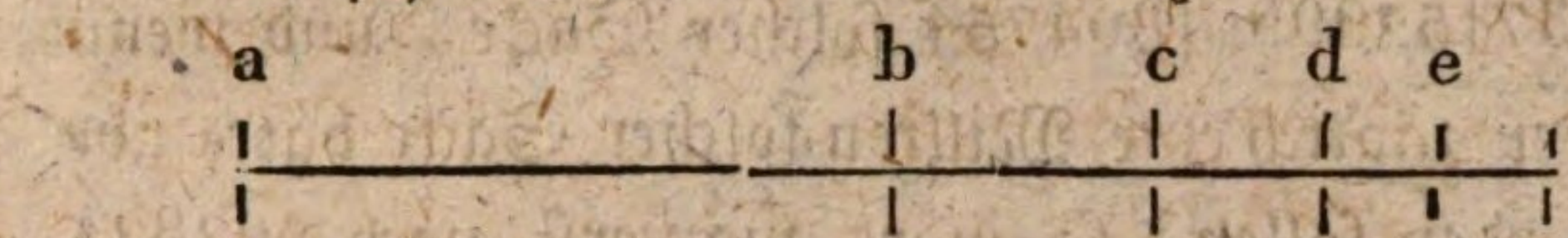
Beyspiel. I. Es sey die Reihe folgende

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$. so wird $s =$

$\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$; d. h. wenn man von einer Grö

theil u. s. f. ins Unendliche nimmt, so ist Summe aller dieser Theile der ganzen Größe gleich.

Es sey die Linie a t das Ganze



so nähert man sich von a dem Puncte t nach dem G
setze, daß der erste Schritt $ab = \frac{1}{2}at$, der zwe
Schritt $bc = \frac{1}{4}at$, der dritte Schritt $cd = \frac{1}{8}$ a
der vierte Schritt $de = \frac{1}{16}at$ ist u. s. w. Wenn n
dieses Fortschreiten ins Unendliche geschieht, so w
man dem Ziele t so nahe rücken, daß der noch st
findende Abstand davon ohne merkbaren Fehler = 0

II. Auf gleiche Weise findet man die Summen
nachfolgenden unendlichen Progressionen:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots\ldots =$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \ldots\ldots =$
$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{75} + \frac{1}{375} + \ldots\ldots =$
$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \ldots\ldots =$

Oder allgemein:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} + \ldots\ldots = \frac{1}{n-}$$

III. Die letzte Reihe im II. wird auch durch
wirkliche Division von $n - 1$ in 1 erhalten; nämli

$$n-1 \mid 1 \mid \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} \cdots$$

$$\frac{1 - \frac{1}{n}}{+\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{+\frac{1}{n^2}}$$

$$\frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{+\frac{1}{n^3}}$$

$$\frac{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{+\frac{1}{n^4}}$$

$$\frac{\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^5}}{+\frac{1}{n^5}} \text{ Rest.}$$

Wenn nun n sehr groß ist, was bey einer unendl
Reihe wirklich Statt hat, so wird $\frac{1}{n^5}$ so klein, da
$= 0$ gesetzt werden kann. Daher ist obiger Rest =
und man hat auch durch vorstehende Division bewiesen,
$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} + \ldots\ldots = \frac{1}{n-1}$ is

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots$ so wird

$$s = \frac{a}{1-e} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Für $\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{45} + \frac{2}{135} + \frac{2}{405} + \ldots$

wird $s = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, weil hier $e = \frac{1}{3}$ ist.

Wäre allgemein die Reihe diese:

$$a + a\frac{n}{m} + a\frac{n^2}{m^2} + a\frac{n^3}{m^3} + a\frac{n^4}{m^4} + \ldots \text{ wo}$$

$\frac{n}{m}$ ein ächter Bruch ist, so würde $s = \frac{a}{1-\frac{n}{m}} = \frac{a}{\frac{m-n}{m}}$

$= \frac{am}{m-n}$. So gäbe in der Reihe:

$4 + 4.\frac{2}{3} + 4.\frac{4}{9} + 4.\frac{8}{27} + 4.\frac{16}{81} + \ldots$

die Summe den Werth $s = \frac{4 \cdot 3}{3-2} = 12$.

Sechste Abtheilung.

Von den Logarithmen.

§. 449. Aufgabe. Wenn irgend eine ari
metische Progression gegeben ist, dieselbe in eine and
von dem nämlichen Unterschiede zu verwandeln, deren ers
Glied = 0 ist.

Auflösung und Beweis. Es sey die P
gression diese:

a a + d a + 2d a + 3d a + 4d a + 5d.

so ziehe man von jedem Gliede das erste Glied a ab,
entsteht eine andere Reihe

0 d 2d 3d 4d 5d.... worin das erste Glied =
und der Unterschied der Glieder = -d ist. Auch si
man, daß sich jede gegebene arithmetische Progressi
auf diese Art behandlen lasse.

§. 450. Zusatz. I. Auch ist klar, daß in dies
Falle jedes folgende Glied ein Mehrfaches des Unt
schiedes werde. Das n^te Glied ist = (n — 1)d.

II. Wird diese Reihe rückwärts fortgesetzt, so erh
man unter 0 die negativen Glieder:

— d — 2d — 3d — 4d — 5d.... so, daß d
n^te Glied unter 0 den Werth — (n — 1)d erhält.

III. Die ganze Progression ist daher folgende:

I^s II^s III^s IV^s V^s ... n^tes Glied

—(n—1)d...—4d—3d—2d—d 0 d 2d 3d 4d....(n—1)d

§. 451. Aufgabe. Wenn irgend eine geometrische Progression gegeben ist, dieselbe in eine andere von demselbigen Exponenten zu verwandeln, worin das erste Glied = 1 ist.

Auflösung und Beweis. Die Progression sey diese:

a ae ae^2 ae^3 ae^4 ae^5 ae^6 .... so dividire man jedes ihrer Glieder durch a und man wird folgende Reihe erhalten:

1 e e^2 e^3 e^4 e^5 e^6 .... welche der Foderung der Aufgabe entspricht.

§. 452. Zusatz. I. Hieraus folget, daß in diesem Falle jedes Glied eine Potenz des Exponenten ist. Auch wird nun das n^{te} Glied $= e^{n-1}$.

II. Da $e^0 = 1$ und $e^1 = e$ ist, so kann auch diese Progression folgendergestalt geschrieben werden:

e^0 e^1 e^2 e^3 e^4 e^5 e^6 ....

III. Setzt man sie rückwärts unter 1 fort, so entstehen diese Glieder:

$\frac{1}{e}$ $\frac{1}{e^2}$ $\frac{1}{e^3}$ $\frac{1}{e^4}$ $\frac{1}{e^5}$ $\frac{1}{e^6}$ ...; so, daß das n^{te} Glied unter 1 den Werth $\frac{1}{2^{n-1}}$ erhält.

IV. Die ganze Progression ist daher folgende:

I II III IV V n^{tes} Glied

$\frac{1}{e^{n-1}}$ .... $\frac{1}{e^4}$ $\frac{1}{e^3}$ $\frac{1}{e^2}$ $\frac{1}{e}$ e^0 e^1 e^2 e^3 e^4 .... e^{n-1}

Oder, da $\frac{1}{e} = e^{-1}$; $\frac{1}{e^2} = e^{-2}$ u. s. f. ist,

$e^{-(n-1)}$ .. e^{-4} : e^{-3} : e^{-2} : e^{-1} : e^0 : e^1 : e^2 : e^3 : e^4 .... e^{n-}

ponenten ihrer Glieder eine arithmetische Progressio
bilden, welche sich, von 0 einerseits durch alle auf ei
ander folgende positive ganzen Zahlen, und andere
seits durch alle negative ganzen Zahlen ins Unendlic
hin erstreckt.

§. 454. Erklärung. Das Verhältniß $e^0 : e$
oder $1 : e$ bestimmt alle folgende Glieder der ganz
Reihe sowohl zur Rechten als zur Linken von e^0. D
her bilder dieses Verhältniß eigentlich den Grund d
ganzen Progression. Man nennt es deshalb das Grun
verhältniß der Reihe. Da e^0, bey jedem Wert
von e, immer $= 1$ ist, so hängt das Grundverhältn
eigentlich von dem Werthe der Größe e ab und die ga
Reihe hat ihre Bestimmung, sobald die Größe von
bestimmt ist. Daher wird e die Grundzahl genen
Für eine Grundzahl gibt es somit auch nur eine g
metrische Progression.

§. 455. Erklärung. Da $e^0 : e^1$ ein Verhä
niß, und $e^0 : e^1 = e^1 : e^2$ ist, so liegen zwischen $e^0 :$
zwey solcher Grundverhältnisse. Da ferner: $e^0 : e^1 = e^1 :$
$= e^2 : e^3$, so befinden sich zwischen $e^0 : e^3$ drey die
Grundverhältnisse; zwischen $e^0 : e^4$ liegen somit vie
zwischen $e^0 : e^5$ fünf, zwischen $e^0 : e^{n-1}$ aber $n -$
solcher Grundverhältnisse, deren jedes immer $= 1 : e$
Indem nun die Zahl der Grundverhältnisse, wel
zwischen dem ersten Gliede der Progression und irge
einem andern Gliede derselben liegen, jedesmal du
den Exponenten dieses letztern Gliedes angegeben wi
so hat man diese Exponenten die Verhältnißzäh
oder die Logarithmen (von λογων und αριθμος)

heißt daher 0 der Logarithmus von $e^0 = 1$, weil e
Glied kein Verhältniß bildet; ferner ist 1 der Logarithm
von e; 3 der Logarithme von e^3; 6 der Logarithme vo
e^6; $n-1$ der Logarithme von e^{n-1}; n der Logarithm
von e^n, da von 1 bis e^n gerade n Grundverhältnis
liegen. Zur Bezeichnung des Logarithmen eines Pro
gressions-Gliedes schreibt man nur die Anfangsbuch
staben Log. So heißt z. B. Log. e^8 soviel als de
Logarithme vom Gliede e^8 u. s. w.

§. 456. Zusatz. Wenn die Grundzahl 2, 3 ode
4 wäre so würden die Reihen und ihre Logarithme
diese:

geom. Reihen
1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 . .
1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 . .
1 : 4 : 16 : 64 : 256 : 1024 : 4096 . .

Logarithmen [0 1 2 3 4 5 6 . .

woraus man sieht, daß z. B. die Zahl 3 als Logarithm
sowohl dem Gliede 8, als dem Gliede 27 und de
Gliede 64 angehört. Denn von 1 bis 8 sind dr
Grundverhältnisse $1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8$; von 1 bis 2
liegen drey Grundverhältnisse $1 : 3 = 3 : 9 = 9 : 2$
und zwischen 1 und 64 befinden sich die drey Grundve
hältnisse $1 : 4 = 4 : 16 = 16 : 64$. Soll dah
diese Zahl 3 als Logarithme nur einem bestimmte
Progressions-Gliede angehören, so kann dieses blos d
durch geschehen, daß die Grundzahl der Progression sel
eine bestimmte ist.

§. 457. Zusatz. Auch geht aus der oben berei
angeführten Reihe deutlich hervor, daß negative L
garithmen zu ächten Brüchen gehören. So ist z.
in der Progression:

$e^{-n} \ldots e^{-4} : e^{-3} : e^{-2} : e^{-1} : e^{0} : e^{1} : e^{2} : e^{3} : e^{4} \ldots e^{n}$

der Logarithme von e^{-1} oder von $\frac{1}{e}$ die Zahl — 1. Da nämlich das Verhältniß von $e^{0} : e^{1}$ dem Verhältnisse von $e^{0} : e^{-1}$ entgegengesetzt ist, indem e^{1} soviel-mal größer als e^{0} ist, sovielmal e^{-n} kleiner ist als e^{0}: so kann man das Verhältniß $e^{0} : e^{-1}$ ein negatives Verhältniß, in Bezug auf das als positiv zu betrachtende Verhältniß $e^{0} : e^{1}$ nennen. Daher zählt hier der Logarithmus — 1 ein negatives Verhältniß, und verdienet mit Recht den Namen eines negativen Logarithmen.

So ist — 3 der Log. von $e^{-3} = \frac{1}{e^{3}}$; — n der Log. von $\frac{1}{e^{n}}$ u. s. w. Nähme man folgende Zahlenreihe:

$\ldots\ldots 3^{-4} : 3^{-3} : 3^{-2} : 3^{-1} : 3^{0} : 3^{1} : 3^{2} : 3^{3} : 3^{4} \ldots$ oder

$\ldots\ldots \frac{1}{81} : \frac{1}{27} : \frac{1}{9} : \frac{1}{3} : 1 : 3 : 9 : 27 : 81 \ldots$

so wäre — 2 der Log. von $\frac{1}{9}$; — 4 der Log. von $\frac{1}{81}$ u. s. f.

§. 458. Lehrsatz. Der Logarithme eines Productes wird gefunden, wenn man die Logarithmen seiner Factoren zusammenaddirt; oder: Log. $a \times b =$ Log. $a +$ Log. b.

Beweis. Aus dem Bisherigen ist klar, daß die Logarithmen der Progressionsglieder mit den diesen Gliedern entsprechenden Exponenten vollkommen einerley, auch daß diese Glieder selbst Potenzen von einerley Wurzel (der Grundzahl) sind. Nun werden aber Potenzen von einerley Wurzeln mit einander multiplicirt, wenn man diese Wurzel zu einer Potenz erhebt, deren Exponent

der Summe der Exponenten der Factoren gleich ist. Folglich erhält man auch den Logarithmen eines Productes, wenn man die Logarithmen seiner Factoren zusammen addirt.

Beyspiele. Die Reihen seyen:

Logarithmen...—4—3—2—1 0 1 2 3 4 5 6 7 8..

..$e^{-4}:e^{-3}:e^{-2}:e^{-1}:e^{0}:e^{1}:e^{2}:e^{3}:e^{4}:e^{5}:e^{6}:e^{7}:e^{8}$...

Oder .... $\frac{1}{16}:\frac{1}{8}:\frac{1}{4}:\frac{1}{2}:1:2:4:8:16:32:64:128:256$

so ist Log. $e^2 = 2$ und Log. $e^4 = 4$, daher Log. $e^2 \times e^4 = 2 + 4 = 6$, wo denn zum Logarithmen 6 das Glied e^6 als Zahl gehört. Nun ist auch $e^2 \times e^4 = e^{2+4} = e^6$. Da man von $e^0 : e^2$ zwey Grundverhältnisse, von $e^0 : e^4$ aber vier dergleichen zählt, so ist von selbst klar, daß man von $e^0 : e^6$ sechs dieser Verhältnisse zählen muß.

Log. $(e^1 \times e^2 \times e^5) = 1 + 2 + 5 = 8$, und 8 ist der Logarithme von e^8, so wie auch $e^1 \times e^2 \times e^5 = e^{1+2+5} = e^8$ ist.

Log. $(e^{-3} \times e^5) = -3 + 5 = +2$; $+2$ aber ist Logarithmus von e^2, und man hat wirklich $e^{-3} \times e^5 = e^{-3+5} = e^2$.

Gesetzt, man wollte in obiger Zahlenreihe das Product $\frac{1}{8} \times 256$ durch Logarithmen finden. Man suche den Logarithmen jedes der beyden Factoren, addire sie zusammen, so ist die Summe der Logarithmus des Productes. Sucht man daher diese Summe in der Reihe der Logarithmen, so steht das zufindende Product dabey: Da nun Log. $\frac{1}{8} = -3$ und Log. $256 = 8$ ist, so wird $-3 + 8 = 5$ der Logarithme des Productes, welches daher $= 32$ ist. Die wirkliche Rechnung gibt auch $\frac{1}{8} \times 512 = \frac{256}{8} = 32$.

§. 459. Anmerkung. Hätte man Tabellen, in welchen alle Zahlen nebst ihren Logarithmen enthalten wären,

so würde man die Multiplicationen mit diesen Zahlen auf weit leichtere Art dadurch ausführen können, daß man die Logarithmen derselben addirte und zur Summe die gehörige Zahl suchte, welche das verlangte Product wäre.

§. 460. Lehrsatz. Man findet den Logarithmen eines Quotienten, wenn man von dem Logarithmen des Dividenden jenen des Divisors subtrahirt; oder Log. $\frac{a}{b}$ = Log. a — Log. b.

Beweis. Da die Logarithmen der Progressionsglieder zugleich auch die Exponenten dieser Glieder sind, und diese Glieder die Grundzahl zur gemeinschaftlichen Wurzel haben, so ist diese Division der Progressionsglieder eine Division der Potenzen von einerley Wurzeln. Da aber bey dieser der Exponent des Divisors von jenem des Dividenden subtrahirt wird, so gilt eben diese Subtraction auch für die, durch diese Exponenten ausgedrückten Logarithmen.

Beyspiele. In der Reihe des vor. § wird Log. $(e^8 : e^5)$ = Log. e^8 — Log. e^5 = 8 — 5 = 3 und 3 ist der Log. von $e^8 : e^5$. Denn $e^8 : e^5 = e^{8-5} = e^3$; e^3 aber hat 3 zum Logarithmen.

Ferner ist Log. $(e^3 : e^7)$ = Log. e^3 — Log. e^7 = 3 — 7 = — 4. Wirklich ist auch — 4 der Logarithmus von e^{-4}, und $e^3 : e^7 = e^{3-7} = e^{-4}$.

Sollte die Division $2 : \frac{1}{16}$ durch Logarithmen ausgeführt werden, so sage man Log. $(2 : \frac{1}{16})$ = Log. 2 — Log. $\frac{1}{16}$ = 1 — (— 4) = 5. Da nun zum Logarithmen 5 die Zahl 32 gehört, so ist 32 der verlangte Quotient. Die gewöhnliche Rechnung gibt $2 : \frac{1}{16} = 2 \times 16 = 32$.

§. 461. Anmerkung. Wenn man von allen Zahlen die Logarithmen hätte, so dürfte man nur den Logarithmen des Divisors von jenem des Dividenden subtrahiren, um den

Logarithmen des Quotienten zu finden, und die zur Differenz gehörige Zahl würde der gesuchte Quotient seyn. Durch diese Logarithmen-Rechnung würde also die gewöhnliche Division sehr erleichtert. Noch weit vortheilhafter zeigt sich aber diese Rechnung bey dem Erheben zur Potenz und bey Ausziehung der Wurzeln, wie nachfolgende Aufgaben lehren.

§. 462. Aufgabe. Eine Zahl durch Hülfe der Logarithmen zu einer höhern Potenz zu erheben.

Auflösung. Wenn man den Logarithmen der gegebenen Zahl durch den Grad der Potenz multiplicirt, so erhält man den Logarithmen der verlangten höhern Potenz. Die ihm zugehörige Zahl ist die verlangte Potenz selbst.

Beweis. Da $e^2 = e \times e$, so ist auch Log. $e^2 =$ Log. $e +$ Log. $e = 2 \times$ Log. e. — Da $e^3 = e \times e \times e$, so ist auch Log. $e^3 =$ Log. $e +$ Log. $e +$ Log. $e =$ $3 \times$ Log. e. Da $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$, so ist auch Log. $24 =$ Log. $2 +$ Log. $2 +$ Log. $2 +$ Log. $2 = 4 \times$ Log. 2.

Daher denn auch allgemein Log. $e^n = n \times$ Log. e ist.

Ferner wäre z. B. Log. $18^2 = 2 \times$ Log. 18; Log. $36^3 = 3 \times$ Log. 36; Log. $48^4 = 4 \times$ Log. 48; Log. $27^{12} = 12 \times$ Log. 27; Log. $2387^{15} = 15 \times$ Log. 2387 u. s. f. woraus die Bequemlichkeit dieser Rechnung für das Potenziren hervorgeht, wenn man nur zu jeder Zahl den Logarithmen und zu jedem Logarithmen die zugehörige Zahl finden kann.

§. 463. Aufgabe. Durch Hülfe der Logarithmen aus einer gegebenen Zahl die Wurzel eines gegebenen Grades zu ziehen.

Auflösung. Wenn man den Logarithmen der gegebenen Zahl durch den Grad der verlangten Wurzel dividirt, so ist der Quotient der Logarithmus der zusuchenden Wurzel. Sucht man hiezu die zugehörige Zahl, so ist diese die zufindende Wurzel selbst.

gegengesetzte von dem Potenziren ist, so muß auch mit den Logarithmen die entgegengesetzte Rechnung vorgenommen werden; d. h. bey dem Wurzelausziehen müßen die Logarithmen durch den Grad der Wurzel dividirt werden.

Beyspiele. $\text{Log. } \sqrt{e} = \frac{1}{2} \text{ Log. } e$; $\text{Log. } \sqrt[3]{e} = \frac{1}{3} \text{ Log. } e$; $\text{Log. } \sqrt[4]{e} = \frac{1}{4} \text{ Log. } e$; $\text{Log } \sqrt[5]{12} = \frac{1}{5} \text{ Log. } 12$; $\text{Log } \sqrt[8]{17829} = \frac{1}{8} \text{ Log. } 17829$; und allgemein $\sqrt[n]{e} = \frac{1}{n} \text{ Log. } e$.

Man kann diese Sätze auch dadurch erläutern, daß $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ist. Da nun $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a$, so muß auch $\frac{1}{2} \text{ Log. } a + \frac{1}{2} \text{ Log. } a = \text{Log. } a$, folglich $\frac{1}{2} \text{ Log. } a = \text{Log. } \sqrt{a}$ seyn.

Ferner ist $\text{Log. } a^{\frac{2}{3}} = \text{Log. } \sqrt[3]{a^2} = \frac{2}{3} \text{ Log. } a$; $\text{Log. } a^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6} \text{ Log. } a$; und überhaupt $\text{Log. } a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \text{ Log. } a$.

Welche bedeutende Vortheile die Logarithmen bey dem Ausziehen der Wurzeln höherer Grade gewähren, wird aus den weiter unten folgenden Zahlen-Beyspielen hervorgehen.

§. 464. Erklärung. Aus den bisherigen Lehren ist klar, daß die Logarithmen eine arithmetische Reihe bilden, welche, von 0 anfangend, sich nach der natürlichen Reihenfolge der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... n sowohl in positiver, als in negativer Bedeutung ins Unendliche hin erstrecken. Diese logarithmische Reihe ist daher jedesmal eine bestimmte. Die ihr entsprechende geometrische Reihe aber kann höchst ma

rithme von 2, 3, 4, 5..... n seyn. Die Verbin
der logarithmischen Reihe mit einer geometrischen
gression von bestimmter Grundzahl wird ein logar
misches System oder ein Logarithmen-Sy
genennt. Daher ist klar, daß unzählig viele
Logarithmen-Systeme möglich sind.

§. 465. Zusatz. Soll aber die Logarith
Rechnung practisch werden, so muß man irgend ein
stimmtes logarithmisches System zum Grunde le
Es verhält sich hier ungefähr so, wie bey dem Zah
systeme der niedern Arithmetik überhaupt. Es
willkührlich, ob man auf 10, oder auf 9, oder auf
oder auf irgend eine andere Zahl zählen wollte; a
um ein allgemein gültiges Zahlensystem zu begrün
mußte man allgemein übereinkommen, wieviele Einhe
einer niedrigern Werthart eine Eins von der nächsthöh
bilden sollen.

§. 466. Erklärung. Unter dem gewöhn
chen oder gemeinen Logarithmensysteme versteht m
jenes, worin die Grundzahl = 10 ist. Das Gru
verhältniß wird hier 1 : 10 und von 10 ist der Logar
me = 1. Man nennt dieses System auch das Brigg
sche, weil Henry Briggs (Prof. der Geometrie
London, nachher zu Oxford, wo er im J. 1630
storben ist) nach demselben zuerst Logarithmentaf
herausgegeben hat. Die ersten Mathematiker ab
welche logarithmische Tafeln berechnet haben, wa
Neper (Napier oder Nepair, Baron von Merchist
in Schottland und Jobst Byrg in Deutschland. Je
theilte sie in der Schrift: Mirifici Logarithmor

gegengesetzte von dem Potenziren ist, so muß auch mit den Logarithmen die entgegengesetzte Rechnung vorgenommen werden; d. h. bey dem Wurzelausziehen müßen die Logarithmen durch den Grad der Wurzel dividirt werden.

Beyspiele. $\text{Log. } \sqrt{e} = \frac{1}{2} \text{ Log. } e$; $\text{Log. } \sqrt[3]{e} = \frac{1}{3} \text{ Log. } e$; $\text{Log. } \sqrt[4]{e} = \frac{1}{4} \text{ Log. } e$; $\text{Log } \sqrt[5]{12} = \frac{1}{5} \text{ Log. } 12$; $\text{Log } \sqrt[8]{17829} = \frac{1}{8} \text{ Log. } 17829$; und allgemein $\sqrt[n]{e} = \frac{1}{n} \text{ Log. } e$.

Man kann diese Sätze auch dadurch erläutern, daß $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ist. Da nun $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a$, so muß auch $\frac{1}{2} \text{ Log. } a + \frac{1}{2} \text{ Log. } a = \text{Log. } a$, folglich $\frac{1}{2} \text{ Log. } a = \text{Log. } \sqrt{a}$ seyn.

Ferner ist $\text{Log. } a^{\frac{2}{3}} = \text{Log. } \sqrt[3]{a^2} = \frac{2}{3} \text{ Log. } a$; $\text{Log. } a^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6} \text{ Log. } a$; und überhaupt $\text{Log. } a^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} \text{ Log. } a$.

Welche bedeutende Vortheile die Logarithmen bey dem Ausziehen der Wurzeln höherer Grade gewähren, wird aus den weiter unten folgenden Zahlen-Beyspielen hervorgehen.

§. 464. **Erklärung.** Aus den bisherigen Lehren ist klar, daß die Logarithmen eine arithmetische Reihe bilden, welche, von 0 anfangend, sich nach der natürlichen Reihenfolge der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... n so, wohl in positiver, als in negativer Bedeutung ins Unendliche hin erstrecken. Diese **logarithmische Reihe** ist daher jedesmal eine **bestimmte**. Die ihr entsprechende **geometrische Reihe** aber kann höchst man

nigfaltig seyn, weil die Grundzahl unzählig vielerley Werthe haben kann. So kann z. B. 1 der Logarithme von 2, 3, 4, 5..... n seyn. Die Verbindung der logarithmischen Reihe mit einer geometrischen Progression von bestimmter Grundzahl wird ein logarithmisches System oder ein Logarithmen-System genennt. Daher ist klar, daß unzählig vielerley Logarithmen-Systeme möglich sind.

§. 465. Zusatz. Soll aber die Logarithmen-Rechnung practisch werden, so muß man irgend ein bestimmtes logarithmisches System zum Grunde legen. Es verhält sich hier ungefähr so, wie bey dem Zahlensysteme der niedern Arithmetik überhaupt. Es war willkührlich, ob man auf 10, oder auf 9, oder auf 12, oder auf irgend eine andere Zahl zählen wollte; allein um ein allgemein gültiges Zahlensystem zu begründen, mußte man allgemein übereinkommen, wieviele Einheiten einer niedrigern Werthart eine Eins von der nächsthöhern bilden sollen.

§. 466. Erklärung. Unter dem gewöhnlichen oder gemeinen Logarithmensysteme versteht man jenes, worin die Grundzahl = 10 ist. Das Grundverhältniß wird hier 1 : 10 und von 10 ist der Logarithme = 1. Man nennt dieses System auch das Briggs'sche, weil Henry Briggs (Prof. der Geometrie in London, nachher zu Oxford, wo er im J. 1630 gestorben ist) nach demselben zuerst Logarithmentafeln herausgegeben hat. Die ersten Mathematiker aber, welche logarithmische Tafeln berechnet haben, waren Neper (Napier oder Nepair, Baron von Merchiston) in Schottland und Jobst Byrg in Deutschland. Jener theilte sie in der Schrift: Mirifici Logarithmorum

Canonis Descriptio ejusque usus in utraque Trigonometria et omni Logistica mathematica explicatio Edinb. 1614. 4to; dieser aber in dem Werke: Arithmetische vnd Geometrische Progreß Tabulen, sambt gründlichen vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen vnd verstanden werden sol. Gedruckt, In der alten Stadt Prag, Im Jahr 1620. (7 ½ Bogen 4to) — Lange vor Neper und Byrg hatte Michael Stifel eine richtige Ansicht von den Logarithmen, wie dieses aus seiner Schrift: Arithmetica integra. Norimb. 1544 hervorgeht, worin er eine arithmetische mit einer geometrischen Reihe verbunden und gezeigt hat, daß Producte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln in dieser mit Summen, Differenzen, Producten und Quotienten in jener übereinstimmten. Da er aber keine Zwischenglieder eingeschalten hatte, so blieben seine Entdeckungen noch weit von der wirklichen Anwendung entfernt.

§. 407. Zusatz. Nach dem Systeme von Briggs sind die Reihen folgende:

−n	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	n
10^{-n}	0,0001 :	0,001 :	0,01 :	0,1 :	1 :	10 :	100 :	1000 :	10000	10^n

woraus man sieht, daß sich die positiven Logarithmen auf positive Potenzen von 10, die negativen Logarithmen aber auf negative Potenzen von 10, d. h. auf ächte Decimalbrüche beziehen. Da aber die Logarithmen-Rechnung nur dann brauchbar für das Practische werden kann, wenn man im Stande ist, von jeder Zahl den ihr zugehörigen Logarithmen zufinden, so entsteht die höchst wichtige Frage: Wie können in obiger Reihe die Logarithmen aller Zahlen von 2 bis 9; von 11 bis 99; von 101 bis 999; von 1001 bis 9999 u. s. f. be-

rechnet und so eingeschalten werden, daß man hieraus eine Tabelle erhält, welche die Logarithmen aller natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. s. f. darstellt? Die Beantwortung dieser Frage wird am Deutlichsten aus dem Beyspiele der folgenden Aufgabe hervorgehen.

§. 468. Aufgabe. Man soll den Logarithmen finden, welcher der Zahl 9 zugehört.

Auflösung. I. Da 9 größer als 1 und kleiner als 10 ist, so muß auch Log. 9 größer als 0 und kleiner als 1 seyn; d. h. wenn zwischen 1 : 10 ein ganzes Grundverhältniß liegt, so kann zwischen 1 : 9 kein ganzes Grundverhältniß, sondern nur ein Theil dieses Grundverhältnisses liegen. Daher heißt die Aufgabe so: Man soll finden, was für ein Stück das Verhältniß von 1 : 9 vom Verhältnisse 1 : 10 sey. Die Zahl, welche dieses andeutet, ist der Logarithme von 9.

II. Setzt man nun $1 : c = c : 10$, so ist 1 : c die Hälfte des Verhältnisses von 1 : 10. Allein $c = \sqrt{1 \times 10} = \sqrt{10} = 3{,}1622777$; folglich ist das Verhältniß von 1 : 3, 1622777 dem halben Verhältnisse von 1 : 10 gleich, und der Logarithme von 3,1622777 muß $= \frac{1}{2} = 0{,}5$ seyn.

III. Da nun 9 zwischen 3,1622777 und 10 fällt, so setze man die Progression $3{,}1622777 : d = d : 10$, woraus $d = \sqrt{3{,}1622777 \times 10} = \sqrt{31{,}622777} = 5{,}6234132$ wird. Weil nun Log. $3{,}1622777 = \frac{1}{2}$ und Log. $10 = 1$ ist, so muß Log. $5{,}6234132 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4} = 0{,}75$ seyn, d. h. von 1 bis 5,6234132 liegt $\frac{3}{4}$ des Grundverhältnisses 1 : 10, oder jenes Verhältniß ist $\frac{3}{4}$ von diesem.

IV. Nun fällt aber 9 wieder zwischen 5,6234132 und 10, daher sey $5{,}6234432 : e = e : 10$, so wird $e =$

$\sqrt{}56{,}234132 = 7{,}4989421$ und Log. $7{,}4989421 = \frac{1}{2}(\frac{3}{4} + 1) = \frac{7}{8} = 0{,}875$.

V. Da hier 9 zwischen 10 und 7,4989421 liegt, so sey $10 : f = f : 7{,}4989421$, woraus $f = \sqrt{}74{,}989421 = 8{,}6596432$ wird. Daher ist Log. $8{,}6596432 = \frac{1}{2}$ Log $(1 + \frac{7}{8}) = \frac{15}{16} = 0{,}9375$.

VI. Da nunmehr 9 zwischen 10 und 8,6596432 liegt, so sey $10 : g = g : 8{,}6596432$, woraus $g = \sqrt{}86{,}596432 = 9{,}3057204$, auch Log. $9{,}3057204 = \frac{1}{2}$ Log. $(1 + \frac{15}{16}) = \frac{31}{32} = 0{,}96875$ wird. Da man den gemischten Bruch 9,3057204 nicht für die Zahl 9 setzen kann, so muß die seitherige Rechnung noch weiter fortgeführt werden.

VII. Man setze nämlich, da 9 zunächst zwischen 9,3057204 (in VI) und 8,6596432 (in V) fällt, $9{,}3057204 : h = h : 8{,}6596432$, woraus $h = 8{,}9768713$ und Log. $h = \frac{1}{2}(\frac{31}{32} + \frac{15}{16}) = \frac{61}{64} = 0{,}953125$ wird.

VIII. Nun liegt wieder 9 zwischen den Werthen von g (in VI) und von h (in VII). Daher sey: $9{,}3057204 : i = i : 8{,}9768713$, woraus $i = 9{,}1398170$ wird. Log. i wird $= \frac{1}{2}(96875 + 0{,}953125) = 0{,}96093750$.

IX. Jetzt muß die Proportion $9{,}1398170 : k = k : 8{,}9768713$ aufgelößt werden. Dies gibt $k = 9{,}0579777$ und Log. $k = \frac{1}{2}(0{,}9609375 + 0{,}953125) = 0{,}95703125$.

X. Den fernern Gang dieser mühevollen Rechnung lehrt folgende Uebersicht, welche durch die bisherigen Erläuterungen leicht verständlich seyn wird:

	Mittlere geometrische Proportionalzahlen.	Zugehörige Logarithmen.
XI.	$9{,}0579777 = k$	0,95703125
	$9{,}0173333 = l$	0,95507812
	$8{,}9768713 = h$	0,95312500

	Mittlere geometrische Proportionalzahlen.	Zugehörige Logarithmen.
XII.	9,0173333 = l	0,95507812
	8,9970796 = m	0,95410156
	8,9768713 = h	0,95312500
XIII.	9,0173333 = l	0,95507812
	9,0072008 = n	0,95458984
	8,9970796 = m	0,95410156
XIV.	9,0072008 = n	0,95458984
	9,0021388 = o	0,95434570
	8,9970796 = m	0,95410156
XV.	9,0021388 = o	0,95434570
	8,9996088 = p	0,95422363
	8,9970796 = m	0,95410156
XVI.	9,0021388 = o	0,95434570
	9,0008737 = q	0,95428467
	8,9996088 = p	0,95422363
XVII.	9,0008737 = q	0,95428467
	9,0002412 = r	0,95425415
	8,9996088 = p	0,95422363
XVIII.	9,0002412 = r	0,95425415
	8,9999250 = s	0,95423889
	8,9996088 = p	0,95422363
XIX.	9,0002412 = r	0,95425415
	9,0000831 = t	0,95424652
	8,9999250 = s	0,95423889
XX.	9,0000831 = t	0,95424652
	9,0000041 = v	0,95424271
	8,9999250 = s	0,95423889

	Proporzionalzahlen:	garithmen:
XXI.	9,0000041 = v	0,95424271
	8,9999650 = x	0,95424080
	8,9999250 = s	0,95423889
XXII.	9,0000041 = v	0,95424271
	8,9999845 = y	0,95424175
	8,9999650 = x	0,95424080
XXIII.	9,0000041 = v	0,95424271
	8,9999943 = z	0,95424223
	8,9999845 = y	0,95424175
XXIV.	9,0000041 = γ	0,95424271
	8,9999992 = α	0,95424247
	8,9999943 = z	0,95424223
XXV.	9,0000041 = γ	0,95424271
	9,0000016 = β	0,95424259
	8,9999992 = α	0,95424247
XXVI.	9,0000016 = β	0,95424259
	9,0000004 = γ	0,95424253
	8,9999992 = α	0,95424247
XXVII.	9,0000004 = γ	0,95424253
	8,9999998 = δ	0,95424250
	8,9999992 = α	0,95424247
XXVIII.	9,0000004 = γ	0,95424253
	9,0000000 = ε	0,95424252
	8,9999998 = δ	0,95424250

Nachdem man hier 28 mal die Quadratwurzel aus
zogen hatte, so fand man als mittlere geometrische P
portional: Zahl die Größe 9,0000000, welche von

Zahl 9 selbst nicht um 0,0000001 verschieden ist. Ihr Logarithme ist ganz genau $= 0{,}95424252$. Daher ist das Verhältniß von $1 : 9 = \frac{9}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{4}{100000} + \frac{7}{1000000} + \frac{5}{10000000} + \frac{2}{100000000}$ des Grundverhältnisses 1 : 10.

§. 469. Zusatz. Auch sieht man hieraus ein, daß $9^{0,95424259} = 10$ ist, da die Logarithmen auch Exponenten der potenzirten Grundzahl sind. Desgleichen ist klar, daß die Zahl 9, als Zwischenglied in die geometrische Reihe 1 : 10 : 100 : 1000 ... eingeschaltet worden ist. Zwar ist dieses Zwischenglied hier nicht ganz genau $= 9$; doch beträgt der Fehler noch kein Zehnmillionentheilchen der Einheit; ein Fehler, welcher, auch bey einer Einheit von bedeutender Größe, soviel als nichts ist. Hätte derselbe noch kleiner werden sollen, so dürfte man nur die Quadratwurzeln in obiger Rechnung (vor. §.) auf mehr, als auf sieben Decimalbruchstellen bestimmen.

§. 470. Zusatz. Aus dem Bisherigen ist klar, wie man im Stande war, für jede Zahl zwischen 1 und 10 den zugehörigen Logarithmen zu finden. Diese höchst mühsame Rechnung ist wirklich von den ersten Erfindern der Logarithmen ausgeführt worden. Durch die Fortschritte der Mathematik hat man aber späterhin Methoden erfunden, diese Resultate auf weit kürzerm Wege zu erhalten. Doch war es nicht nöthig, obige Rechnungen für alle ganze Zahlen, welche zwischen 1 und 10 liegen, durchzuführen. Denn da Log. $9 = 0{,}95424252$ ist, so muß Log. $3 = \frac{0{,}95424252}{2} = 0{,}47712126$ seyn. Auch wird Log. $27 =$ Log. $3 +$ Log. $9 = 1{,}43136378$, Log. $81 = 2.$ Log. $9 = 1{,}90848504$, Log. $243 =$

Log. 81 + Log. 3 = 2,38560630. Man sieht hieraus, daß die Logarithmen aller höhern Potenzen von 3 sehr leicht durch Addition gefunden werden können.

§. 411. Zusatz. Daher mußten nur die Logarithmen von 2, 3, 5, und 7 zwischen 1 und 10 auf oben bemerkte beschwerliche Weise berechnet werden. Denn Log. 4 ist = 2 × Log. 2; Log. 6 = Log. 2 + Log. 3; Log. 8 = Log. 2 + Log. 4; und Log. 9 = 2. Log. 3. Man berechnete nämlich:

Log. 2 = 0,3010300
Log. 3 = 0,4771213
Log. 5 = 0,6989700
Log. 7 = 0,8450980
} auf obige Weise

ferner fand man: Log. 11 = 1,0413927 Log. 13 = 1,1139434 u. s. f. und hieraus wurde Log. 4 = 2 × Log. 2 = 0,6020600, Log. 6 = Log. 2 + Log. 3 = 0,7781513, Log. 8 = Log. 2 + Log. 4 = 0,9030900 und Log. 9 = 2 × Log. 3 = 0,9542425, wie oben.

Vermittelst der Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10 konnte man nun sehr leicht die Logarithmen aller Producte aus ihnen berechnen: So ist z. B.

Log. 12 = Log. 3 + Log. 4 = 1,0791812
Log. 14 = Log. 2 + Log. 7 = 1,1461280
Log. 15 = Log. 3 + Log. 5 = 1,1760913
Log. 16 = Log. 2 + Log. 8 = 1,2041200
Log. 18 = Log. 2 + Log. 9 = 1,2552725
Log. 20 = Log. 2 + Log. 10 = 1,3010300
Log. 21 = Log. 3 + Log. 7 = 1,3222193
Log. 22 = Log. 2 + Log. 11 = 1,3424227
Log. 24 = Log. 3 + Log. 8 = 1,3802112
Log. 25 = 2 × Log. 5 = 1,3979400
Log. 26 = Log. 2 + Log. 13 = 1,4149733

Log. 30 = Log. 3 + Log. 10 = 1,4771213 u. s. w.

Man sieht überhaupt hieraus, daß nur die Log. der absoluten Primzahlen mühsam zu berechnen waren; jene aller zusammengesetzten Zahlen konnten weit leichter gefunden werden.

§. 472. Anmerkung. Auf diese Weise erkennt man die Möglichkeit, wie die sogenannten Logarithmen-Tafeln verfertigt werden konnten. Man versteht darunter eine Sammlung von sehr vielen unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen und der ihnen zugehörigen Logarithmen. Die am Schlusse dieser Schrift befindliche Tabelle enthält die Logarithmen aller unmittelbar auf einander folgenden ganzen Zahlen von 1 bis 10000. Ihre Einrichtung und ihr Gebrauch soll nun sogleich erklärt und in vielen Beyspielen erläutert werden.

§. 473. Erklärung: Der Logarithme jedes Zwischengliedes der Briggs'schen Reihe besteht aus zwey Theilen, aus der Kennziffer und aus der Mantisse. Unter Kennziffer versteht man jene Ziffer, welche sich zur Linken des Einerstrichs befindet und 0, 1, 2, 3, 4..... n seyn kann. Mantisse aber nennt man den Inbegriff aller Decimalbruchstellen, welche der Logarithme ausser der Kennziffer noch enthält. So ist z. B. von Log. 2 = 0,3010300 die Kennziffer = 0, die Mantisse = $\frac{3010300}{10000000}$. In Log. 12 = 1,0791812 ist die Kennziffer = 1, die Mantisse = 0,0791812. In Log. 312 = 2,4941546 bildet 2 die Kennziffer und 0,4941546 die Mantisse u. s. w. Die Logarithmen der Hauptglieder der Reihe 1, 10, 100, 1000 ... haben keine Mantissen da sie 0, 1, 2, 3.... sind.

§. 474. Zusatz. I. Wenn die Kennziffer eines Logarithmen gegeben ist, so erkennt man sogleich au

ihr, wieviele Ziffer jene Zahl enthält, welcher sie als Logarithme angehört. Ist die Kennziffer 0, so fällt die zugehörige Zahl zwischen 1 und 10 und hat folglich nur 1 Ziffer. Wäre die Kennziffer 1, 2, 3 oder 4, so bestände die zugehörige Zahl aus 2, 3, 4 oder 5 Ziffern. Für eine Kennziffer = n erhält man eine Zahl von n + 1 Ziffern. Aus diesem Grunde nannte man auch jene Zahl die Kennziffer, weil man aus ihr die beyden Glieder der geometrischen Reihe erkennt, zwischen welche jene Zahlen fallen, deren Logarithmen diese Kennziffer haben.

II. Umgekehrt kann man bey irgend einer gegebenen Zahl, sogleich die Kennziffer des ihr angehörigen Logarithmen bestimmen. Wenn nämlich die Zahl n Ziffer hat, so ist die Kennziffer ihres Logarithmen = n — 1. Die Logarithmen der Zahlen 874962, 40623, 4821 haben zur Kennziffern ihrer Logarithmen die Zahlen 5, 4 und 3. Denn 874962 fällt in der Reihe zwischen 100000 und 1000000; daher ihr Logarithme zwischen 5 und 6. Er muß daher aus 5 Ganzen nebst Decimalbruchtheilen bestehen. Die Zahl 40623 fällt zwischen die Glieder 10000 und 100000 Daher muß die Kennziffer ihres Logarithmen = 4 seyn u. s. f.

III. Hieraus ergibt sich die Richtigkeit folgender zwey Regeln:

A. Wenn ein Logarithme gegeben ist, so besteht die zu ihm gehörige Zahl aus einer Ziffer mehr, als wieviele Einheiten dessen Kennziffer enthält;

B. Wenn zu einer angegebenen Zahl der Logarithme gefunden werden soll, so enthält dessen Kennziffer eine Einheit weniger, als aus wievielen Ziffern jene Zahl besteht.

§. 475. Aufgabe. Durch Hülfe der Logarithmentafel zu jeder ganzen, zwischen 1 und 10000 fallenden Zahl den ihr entsprechenden Logarithmen zu finden.

Auflösung. I. Wenn die gegebene Zahl nur aus 1 oder 2 Ziffern besteht. Man suche sie in der mit z bezeichneten Spalte der, dieser Schrift angehängten Logarithmentafel, so steht unmittelbar neben ihr in der mit 0 bezeichneten Spalte die Mantisse des dazu gehörigen Logarithmen; dergestalt, daß wenn in derselben keine Zehntel angegeben sind, die zunächst oberhalb dieser Bruchstellen stehenden Ziffer dafür genommen werden müßen. Die Kennziffer ist immer nur einmal zu Anfang jeder Spalte gesetzt, weil sie leicht ohne Tafel bestimmt werden kann.

Beyspiele. Auf diese Art findet man auf der ersten Seite der Tafel:

Log. 6 = 0,7781512
Log. 13 = 1,1139433
Log. 15 = 1,1760913
Log. 33 = 1,1238516.

ferner findet man:

Log. 41 = 1,5127839
Log. 64 = 1,8061800
Log. 75 = 1,8750613
Log. 86 = 1,9344984
Log. 99 = 1,9956352

II. Wenn die gegebene Zahl aus drey oder aus vier Ziffern besteht. Hier suche man die Hunderte, oder die Tausendte und Hunderte, welche sie enthält, in einer der zu Anfange jeder Seite nebeneinanderstehenden vier Fächer, die Zehner und Einer aber in der mit z bezeichneten Spalte auf.

Rechten bis man jene Hunderte, oder Tausende und Hunderte, lothrecht darüber erblickt, so wird man auf die Mantisse des zufindenden Logarithmen geleitet, deren höchste Decimalstellen man wie in I. erhält. Die Kennziffer wird nach der bekannten Regel bestimmt.

Beyspiele. Hierdurch findet man:

Log. 184 = 2,2648178,
Log. 619 = 2,7916906,
Log. 809 = 2,9089485,
Log. 925 = 2,9661417,
Log. 1056 = 3,0236639
Log. 1162 = 3,0652061
Log. 1561 = 3,1934029
Log. 2746 = 3,4387005
Log. 6282 = 3,7980979
Log. 7094 = 3,8508912
Log. 8128 = 3,9099837
Log. 9423 = 3,9741892,
Log. 9786 = 3,9906052 u. s. w.

§. 476. Aufgabe. Zu einem gemischten o reinen Decimalbruche, welcher (ausser den etwai Nullen) nicht mehr als vier Ziffer enthält, den zu hörigen Logarithmen zu finden.

Auflösung. I. Wenn der gegebene gemi Bruch ausser den Ganzen nur noch Zehntel enthält.

Man suche nach der Vorschrift des vor. §. den den vier gegebenen Ziffern (welche man als Ganze trachtet) gehörigen Logarithmen und vermindere d Kennziffer um 1, so erhält man den gesuchten L rithmen.

Beyspiele. Man soll von 387,6 den Loga

men finden. Hier ist Log. 3876 = 3,5883838; folglich Log. $\frac{3876}{10}$ = 3,5883838 — 1 d. h. Log. 387,6 = 2,5883838.

Desgleichen ist ferner:

Log. 453,8 = 2,6568645
Log. 468,9 = 2,6710802
Log. 629,7 = 2,7991337
Log. 768,8 = 2,8858134
Log. 909,1 = 2,9586117
Log. 79,3 = 1,8892732
Log. 70,3 = 1,8469553
Log. 21,7 = 1,3364597
Log. 8,9 = 0,9493900
Log. 9,8 = 0,9912261
Log. 1,7 = 0,2304489 u. s. f.

II. Wenn der gegebene gemischte Bruch auser Ganzen noch aus Zehntel und Hunderttel, oder aus Zehntel, Hunderttel und Tausendtel besteht.

Hier suche man zu den gegebenen Ziffern, als wenn sie lauter Ganze wären, den gehörigen Logarithmen und bestimme dessen Kennziffer nach der Anzahl der Ganzen, welche die gegebene Zahl enthält; so, daß bey blosen Einern diese Kennziffer = 0, bey Zehnern und Einern aber = 1 wird.

Beyspiele. Log. 64,54 = Log. $\frac{6454}{100}$ = Log. 6454 — Log. 100 = 3,8098290 — 2 = 1,8098290.

Ferner wird:

Log. 54,96 = 1,7400467,
Log. 46,92 = 1,6713580,
Log. 42,97 = 1,6331654,
Log. 6,298 = 0,7992027,

Log. 6,187 = 0,7914801
Log. 5,284 = 0,7229628
Log. 1,295 = 0,1122698 u. s. w.

III. Wenn die gegebene Zahl ein reiner Decimalbruch von höchstens vier Ziffern ist.

Man suche zu den gegebenen Ziffern, als wären sie Ganze, den Logarithmen und hänge der gefundenen Mantisse zur Rechten die Kennziffer — 1, — 2, — 3 u. s. f. an, jenachdem der Decimalbruch in den Zehntel, Hunderttel, Tausendtel u. s. w. anfängt.

Beyspiele. Log. 0,487 = Log. $\frac{487}{1000}$ = Log. 487 — Log. 1000 = Log. 487 — 3 = 2,6875290 — 3 = 0,6875290 — 1, wo denn die zur Rechten stehende — 1 die negative Kennziffer bedeutet; die Mantisse 0,6875290 aber ist durchaus positiv. Ferner ist

Log. 0,2385 = 0,3774884 — 1
Log. 0,543 = 0,8709888 — 1
Log. 0,93 = 0,9684829 — 1
Log. 0,7 = 0,8450980 — 1
Log. 0,043 = 0,6334685 — 2
Log. 0,0321 = 0,5065050 — 2
Log. 0,03256 = 0,5126344 — 2
Log. 0,0085 = 0,9294189 — 3
Log. 0,00498 = 0,6972293 — 3
Log. 0,0008 = 0,9030900 — 4
Log. 0,00036 = 0,5563025 — 4
Log. 0,0005287 = 0,7232093 — 4
Log. 0,000015 = 0,1760913 — 5 u. s. f.

§. 477. Anmerkung. Den Log. 0,487 (im vor. §.) hätte man auch folgendergestalt ausdrücken können:

Log. 487 = 2,6875290
Log. 1000 = 3,0000000, folglich

Log. $\frac{487}{1000}$ = Log. 0,487 = — 0,3124710, welches eine negative Mantisse gibt, da im obigen Ausdrucke: Log. 0,487 = 0,6875290 — 1 die Mantisse positiv bleibt und nur — 1 als negative Kennziffer erscheinet. Obwohl hieraus klar ist, daß 0,6875290 — 1 = — 0,3124710, so gewährt jener Ausdruck für die practische Logarithmen-Rechnung mehr Vortheile, als dieser, wie die Folge lehren wird.

§. 478. Aufgabe. Den Logarithmen eines gemeinen Bruchs zu finden, dessen Zähler und Nenner aus nicht mehr, als aus vier Ziffern besteht.

Auflösung. I. Wenn der vorgegebene Bruch ein unächter ist.

Hier subtrahire man den Logarithmen des Nenners vom Logarithmen des Zählers, so ist der Rest der Logarithmus des gegebenen Bruches.

Beyspiele. Log. $\frac{17}{5}$ = Log (17 : 5) = Log. 17 — Log. 5. Dies gibt

Log. 17 = 1,2304489
Log. 5 = 0,6989700, folglich
Log. $\frac{17}{5}$ = 0,5314789

Ferner Log. $\frac{3874}{512}$ gibt

Log. 3874 = 3,5881596
Log. 512 = 2,7092700 folglich
Log. $\frac{3874}{512}$ = 0,9788896

Für Log. $\frac{754}{712}$ wird

Log. 754 = 2,8773713
Log. 712 = 2,8524800, folglich
Log. $\frac{754}{712}$ = 0,0248913

Bey Log. $\frac{5884}{9}$ ist

Log. 9 = 0,9542425, daher

Log. $\frac{5884}{9}$ = 2,8154302 u. s. w.

II. Wenn der angegebene Bruch ein ächter ist.

Man hänge an dessen Zähler eine, oder zwey, od
drey oder vier Nullen, bis derselbe zunächst größer als dess
Nenner wird, ziehe vom Logarithmen des jetzigen Zä
lers jenen des Nenners ab und setze zur Rechten d
Mantisse die Kennziffer — 1, — 2, — 3 oder —
jenachdem man 1, 2, 3 oder 4 Nullen angehängt hat.

Beyspiele. Was ist Log. $\frac{5}{8}$?

Hier sage man: Log. 50 = 1,69897
ferner ist Log. 8 = 0,90309

folglich Log. $\frac{5}{8}^0$ = 0,79588

Da nun $\frac{5}{8}^0 : 10 = \frac{5}{8}$, so muß auch Log. $\frac{5}{8}^0$ — L
10 = Log. $\frac{5}{8}$ seyn, d. h.

0,7958800 — 1 = Log. $\frac{5}{8}$.

Eine Probe hierüber ist folgende. Da nämlich $\frac{5}{8}$
0,625 ist, so muß auch Log. 0,625 = Log. $\frac{5}{8}$ se
Man findet nun wirklich (nach den Regeln des vorl
ten §.) Log. 0,625 = 0,7958800 — 1 wie hier.

Was ist Log. $\frac{17}{29}$? Hier ist

Log. 170 = 2,2304489 und
Log. 29 = 1,4623980 folglich
Log. $\frac{17}{29}$ = 0,7680509 — 1

Was wird Log. $\frac{39}{9874}$? dies gibt

Log. 39000 = 4,5910646 und
Log. 9874 = 3,9944931, daher
Log. $\frac{39}{9874}$ = 0,6065715 — 3

Was ist Log. $\frac{1}{5432}$? Hier wird

Log. 10000 = 4,0000000 und

Log. 5432 = 3,7349598, folglich

0,2650402 — 4

§. 479. Anmerkung. I. Auch kann man die gemeinen Brüche in Decimalbruchtheilen ausdrücken und zu letztern die Logarithmen suchen. Wenn aber der Quotient mehr als vier Ziffer (ohne die etwaigen Nullen zu rechnen) enthält, so können die dazugehörigen Logarithmen erst durch die sogleich folgenden Regeln gefunden werden.

II. Bestände eine gemischte Zahl aus Ganzen und ächten Bruchtheilen, so verwandle man sie in einen uneigentlichen Bruch und suche dessen Logarithmen nach dem vor. §. So ist z. B. Log. $7\frac{4}{5}$ = Log. $\frac{39}{5}$ = Log. 39 — Log. 5 = 1,5910646 — 0,6989700 = 0,8920946 u. s. f.

§. 480. Aufgabe. Zu jeder Zahl, welche aus vier bis sieben Ziffern besteht, den gehörigen Logarithmen zu finden.

Auflösung und Beweis. I. Zuerst bemerke man folgenden Hülfssatz: Die beyden Differenzen der Logarithmen dreyer vierzifferigen Zahlen, welche um 1 und 2 verschieden sind, verhalten sich ebenfalls entweder ganz genau, oder doch sehr nahe wie 1 : 2. Folgende Beyspiele erläutern dieses:

Log. 8499 = 3,9293678

Log. 8498 = 3,9293167

Log. 8497 = 3,9292656

Hier sind die Differenzen der ganzen Zahlen 1 und 2, die Differenzen der ihnen zugehörigen Logarithmen aber 0,0000511 und 0,0001022 und es ist 1 : 2 = 0,0000511 0,0001022 : 0,0001022 0,0000511. Ferner nehme man:

Log. 6094 = 3,7849024

Log. 6093 = 3,7848312

Log. 6092 = 3,7847599.

die Logarithmen aber 0,0000713 0,0001425 und
0,0001425 0,0000713 und es ist 1 : 2 = 0,0000713
0,0001425 : 0,0001425 0,0000713 bis auf eine höchst
unbedeutende Abweichung von 0,0000001.

II. Nun sey der Logarithmus von der fünfzifferigen
Zahl 76928 zu finden. Man dividire dieselbe durch 10,
so wird sie = 7692,8 und fällt somit zwischen die beyd
den ganzen Zahlen 7692 und 7693. Daher ist auch
Log. 7692,8 größer, als Log. 7692 und kleiner, als
Log. 7693. Nun geben die Tafeln:

Log. 7693 = 3,8860957;

Log. 7692,8 soll gefunden werden

Log. 7692 = 3,8860393

Hier ist nun nach I. 7693 — 7692 : 7692,8 — 7692
= 3,8860957 — 38860393 : x, wenn x die Differen
von Log. 7692,8 — Log. 7692 bezeichnet. Oder es ist
1 : 0,8 = 0,0000564 : x, woraus x = 0,8×0,0000564
= 0,00004512 wird, wofür man 0,0000451 setzen kann,
weil die 8te Decimalbruchstelle bey den Logarithmen unserer
Tafeln wegen ihrer Kleinheit nicht mehr beachtet wird.

III. Setzt man nunmehr die in II. gefundene logarith
mische Differenz zum Logarithmen von 7692, so erhält
man zur Summe den Logarithmen von 7692,8. Nämlich

Log. 7692 = 3,8860393

die logarithm. Diff. = 0,0000451

folglich Log. 7692,8 = 3,8860844 und daher Log
76928 = 4,8360844.

Anderes Beyspiel. Man soll Log. 9467,6
finden. Da dieser Logarithme zwischen Log. 9468 und
Log. 9467 fällt, so setze man Log. 9467,6 — Log
9467 = x. Nun ist aber:

Log. 9468 = 3,9762582
Log. 9467,6 soll gefunden werden
Log. 9467 = 3,9762124

Hier wird die Proportion diese: 1 : 0,6 = 0,0000458 : x, folglich x = 0,6 × 0,0000458 = 0,00002748 = = 0,0000275 indem man die niedrigste Bruchstelle 8 wegläßt, aber weil 8 > 5, anstatt 4 nunmehr 5 setzt.

Hier ist also:

Log. 9467 = 3,9762124
die logarithm. Differ. = 0,0000275

folglich Log. 9467,6 = 3,9762399, und daher Log. 94676 = 4,9762399.

Drittes Beyspiel. Was ist Log. 806736?

Dividirt man diese Zahl durch 100, so fällt Log. 8067,36 zwischen Log. 8068 und Log. 8067. Man nenne hier Log. 8067,36 — Log. 8067 = x und setze:

Log. 8068 = 3,9067659
Log. 8067,36 ist zu suchen
Log. 8067 = 3,9067121

Hier wird 1 : 0,36 = 0,0000538 : x; daher, x = 0,36 × 0,0000538 = 0,000019368, wo man die beyden niedrigsten Bruchstellen 6 und 8 wegwirft, aber, weil 6 > 5, statt 3 eine 4 setzt, welches x = 0,0000134 gibt. Nun ist also:

Log. 8067 = 3,9067121
die logarithm. Diff. = 0,0000134
also auch Log. 8067,36 = 3,9067255,
folglich Log. 806736 = 5,9067255.

Viertes Beyspiel. Was ist Log. 5387246?

Hier dividire man diese Zahl mit 1000, so fällt Log. 5387,246 zwischen Log. 5388 und Log. 5387. Auch

finder:

Log. 5388 = 3,7314276

Log. 5387,246 soll gefunden werden

Log. 5387 = 3,7313470. Hieraus wird:

1 : 0,246 = 0,0000806 : x, folglich

x = 0,0000198276, wo man aber die drey niedrigst Bruchstellen 2, 7 und 6 wegwirft; so, daß nun x = 0,0000198.

Es ist also:

Log. 5387 = 3,7313470

die logarithm. Diff. = 0,0000198

folglich Log. 5387,346 = 3,7313668

und daher Log. 5387246 = 6,7313668.

§. 481. Zusatz. Aus dem im vor. §. ausführl erläuterten Verfahren gehen folgende bequeme Reg zur Auflösung der Aufgabe hervor:

I. Wenn die gegebene Zahl 5, 6 oder 7 Ziffer h so schneide man von der Rechten zur Linken 1, 2 o 3 Ziffer ab; so, daß sich zur Linken jedesmal noch Ziffer befinden;

II. Man suche diese vierzifferige Zahl in den Taf auf, subtrahire (ohne die ganzen Logarithmen hera zuschreiben) ihren Logarithmus vom Logarithmen um 1 größern Zahl, und bemerke diese Differenz o die Nullen der höheren Bruchstellen;

III. Diese Differenz multiplicire mit den von der gebenen Zahl nach I. abgeschnittenen Ziffern, und w am Producte von der Rechten zur Linken so viele Zi weg, als wieviele man nach I. abgeschnitten hatte. die höchste dieser weggeworfenen Ziffer größer, als 5 wird die niedrigste der stehenbleibenden um 1 vermeh

IV. Die in III. erhaltenen Ziffer addire man zu den niedrigsten Ziffern des Logarithmen der in I. stehengebliebenen vierzifferigen Zahl, so ist die Summe die Mantisse des verlangten Logarithmen, welcher man nur noch die gehörige Kennziffer zu geben hat, um ihn vollständig zu erhalten.

§. 482. Beyspiele zur Erläuterung.

I. Was ist Log. 68375?

Regel I. gibt 6837|5
Regel II. gibt zur Differenz 635
Regel III. gibt 635 × 5 = 317(5
Regel IV. gibt 3,8348656
1, 317 } addirt
Log. 68375 = 4,8348973

II. Was ist Log. 17834?

Regel I. gibt 1783|4
Regel II. gibt zur Differenz 2436
Regel III. gibt 2436 × 4 = 9744 = 974(4
Regel IV. gibt 3,2511513
1, 974 } addirt
Log. 17834 = 4,2512487.

III. Was ist Log. 384625?

Regel I. gibt 3846|25
Regel II. gibt die Differenz 1129
Regel III. gibt 1129 × 25 = 28225 = 282(25
Regel IV. gibt 3,5850093
2, 282 } addirt.
Log. 384625 = 5,5850375.

IV. Was ist Log. 578324?

Regel I. gibt 5783|24
Regel II. gibt die Differenz 751

Regel IV. gibt 3,[illegible]
2, 180 } addirt

Log. 578324 = 5,7621710

V. Was ist Log. 6832479?

Regel I. gibt 6832|479
Regel II. gibt zur Differenz 635
Regel III. gibt 635 × 479 = 304165 = 304(165
Regel IV. gibt 3,8345479
3, 304 } addirt

Log. 6832497 = 6,8345783.

VI. Was ist Log. 8130472?

Regel I. gibt 8130|472
Regel II. gibt zur Differenz 535
Regel III. gibt 535 × 472 = 252520 = 252(520
Regel IV. gibt 3,9100905
3, 252 } addirt

Log. 8130472 = 6,9101157.

§. 483. Anmerkung. Es ist den Anfängern sel zu empfehlen, sich in solchen Beyspielen zu üben, um hie durch die für das practische Bedürfniß nöthige Gewandthei zu erlangen.

§. 484. Zusatz. I. Wenn zu einer gegebene Zahl der Logarithme gesucht wird, welche auser 7 Zi fern noch zur Rechten mehrere Nullen enthält, so such man den Logarithmus für die gegebenen sieben Ziff und vermehre dessen Kennziffer für jede an der Zal hängende Nulle um eine Einheit, so erhält man den g suchten Logarithmen. Es sey Log. 8130472000 zu fi den. Hier ist, nach dem vor. §. Log. 8130472 = 6,9101157; folglich wird Log. 8130472000 = 9,910115

u. s. w.

II. Wenn eine mehr als siebenzifferige Zahl gegeben ist, welche in Factoren zerlegt werden kann, so findet man ihren Logarithmen durch die Summe der Logarithmen ihrer Factoren. Da z. B. $50466642 = 6222 \times 8111$, so ist auch Log. 50466642 = Log. 6222 + Log. 8111. Nun ist:

Log. 6222 = 3,7939300 ⎫
Log. 8111 = 3,9090744 ⎭ addirt

folglich Log. 50466642 = 7,7030044.

Da ferner $380241544 = 6701 \times 692 \times 82$, und auch

Log. 6701 = 3,8261396 ⎫
Log. 692 = 2,8401061 ⎬ addirt
Log. 82 = 1,9138139 ⎭

folglich Log. 380241544 = 8,5800596 u. s. w.

III. Die Logarithmen der Primzahlen, welche aus mehr als aus 7 Ziffern bestehen, können durch Hülfe jener Tafeln, nach welchen die Logarithmen nur auf 7 Decimalbruchstellen berechnet sind, nicht genau angegeben werden. Zu diesem Zwecke dienen Logarithmen-Tafeln, in welchen diese Rechnungen auf mehr, als auf 7 Bruchstellen fortgesetzt sind.

§. 485. Anmerkung. Durch die bisher entwickelten Lehren wird man nun im Stande seyn, nachfolgende Fragen vermittelst der Logarithmen-Tafel zu beantworten:

1) Was ist Log. $\frac{87432}{24089}$
2) Was ist Log. $\frac{58342\,6}{49703\,0}$
3) Was ist Log. $\frac{9742387}{6359824}$
4) Was ist Log. $\frac{432745}{964283}$
5) Was ist Log. $\frac{3408706}{7532152}$
6) Was ist Log. $\frac{53007}{83256042}$

9) Was ist Log. 903,57

10) Was ist Log. 0,438795

11) Was ist Log. 52,7643

12) Was ist Log. 974,8275

13) Was ist Log. 0,1342874

14) Was ist Log. 0,00038945 u. s. w.

§. 486. Aufgabe. Die Zahl zu finden, welche ein gegebener Logarithmus zugehört, wenn dieselbe höch stens vier Ziffer enthält.

Auflösung. I. Hier suche man in der Logarith mentafel unter den Logarithmen der vierzifferigen Zah len, ob der gegebene Logarithme ganz genau dari steht oder nicht. Im ersten (seltnern) Falle steht die ihr zugehörige Zahl neben den Ziffern seiner Mantisse un man hat dieselbe nur noch nach der gegebenen Kennziffe zu bestimmen. So gehört z. B.

2,9334873 zur Zahl 858

1,9947569 zur Zahl 98,8

2,1126050 zur Zahl 129,6

1,3617278 zur Zahl 2,300

3,4313638 zur Zahl 2700

2,4872798 zur Zahl 307,1

0,4893954 zur Zahl 3,086

0,5659658 zur Zahl 3,631

4,6699674 zur Zahl 46770

5,5166676 zur Zahl 328600

0,7976829 — 1 zur Zahl 0,6276

0,8622507 — 2 zur Zahl 0,07282

0,7965813 — 5 zur Zahl 0,00007881 u. s.

II. Findet man aber die Mantisse des gegebenen

garithmen nicht ganz genau in den Tafeln, so suche man die zunächst kleinere Mantisse darin. Hier steht jene Zahl daneben, welche dem angegebenen Logarithmen zunächst angehört. Es sey 0,7842396 der gegebene Log. so findet man bey den Logarithmen der vierzifferigen Zahlen den ihm zunächst kleineren: 3,7841892, zu welchem 6084 gehört. Daher gehört auch der Logarithme 0,7842396 zu 6,084; allein nicht ganz genau, da nach den 4 Tausendtel der Zahl noch weitere Decimalbruchstellen kommen würden. In vielen Fällen kann man sich aber schon mit Tausendtel begnügen.

Welche Zahl gehört zum Logarithmen 0,3845623? Hier ist der zunächst kleinere Logarithme der Tafeln dieser: 3,3945326, welcher zur Zahl 2424 gehört. Daher gehört zum Logarithmen 0,3845623 die Zahl 2,424 +, wo das Zeichen + andeutet, daß noch mehrere Bruchstellen nachfolgen würden.

Welche Zahl gehört zum Logarithmen 2,9764253? Der zunächst kleinere Logarithme ist 3,9763958, welcher der Zahl 9471 angehört. Daher entspricht dem Logarithmen 2,9764253 die Zahl 947,1 + welche hier nur bis zu den Zehnteln geht.

Welche Zahl gehört zum Logarithmen 3,7485423? Da man in den Tafeln 3,7484981 als den zunächst kleinern Log. findet, so entspricht dem gegebenen zunächst die Zahl 5604, zu welcher aber noch Decimalbruchstellen zu finden sind, um sie genauer zu bestimmen. Dies führt zur folgenden Aufgabe.

§. 487. Aufgabe. Die einem gegebenen Logarithmen entsprechende Zahl bis auf fünf, sechs oder sieben Ziffer zu finden.

Auflösung. I. Dies geschieht durch Hülfe des

oben angeführten Satzes: bey vierzifferigen Zahlen verhalten sich die logarithmischen Differenzen wie die Differenzen der ihnen zugehörigen Zahlen. Z. B.

II. Was ist die zum Logarithmen 1,5827593 gehörige Zahl? Sucht man diese Mantisse in der Logarithmenreihe mit der Kennziffer 3 auf, so ist der zunächst kleinere Logarithme dieser 3,5827450, der nächstgrößere aber ist 3,5828585. Bildet man die logarithmischen Differenzen, so ist die Differenz der größten und der kleinsten Mantisse diese:

0,5828585 größte Mantisse
0,5827450 kleinste Mantisse
0,0001135 Differenz

jene der gegebenen und der kleinsten aber ist:

0,5827593 gegebene Mantisse
0,5827450 kleinste Mantisse
0,0000143 Differenz.

III. Nun gehören zur größten Mantisse die Ziffer 3827, und zur kleinsten Mantisse die Ziffer 3826, welche beyde nur um 1 verschieden sind. Daher setze man die Proportion: 0,0001135 : 0,0000143 = 1 : x, so wird x jene Decimalbruchstellen geben, welche an die kleinere Zahl 3826 zur Rechten kommen. Man dividire demnach mit 1135 in 143, welches folgende Rechnung gibt

1135|1430(0,125
1135
2950
2270
6800
5675
1125,

Daher sind die zur gegebenen Mantisse 0,5827593

gehörigen Ziffer diese 3826125. Da aber der gegebene Logarithme zur Kennziffer 1 hatte, so ist 38,26125 die zum Logarithmen 1,5827593 gehörige Zahl, welche auf sieben geltende Ziffer (die achte würde durch Fortsetzung obiger Division unsicher) bestimmt ist.

§. 488. Zusatz. Die Aufgabe des vor. §. kann sehr einfach nach folgenden Regeln aufgelöset werden, welche aus dem eben angeführten Verfahren hervorgehen:

I. Man ziehe von der gegebenen Mantisse die zunächst kleinere der Tafeln ab und schreibe sowohl die zur letztern Mantisse gehörigen vier Ziffer, als die sich ergebende logarithmische Differenz heraus,

II. Man ziehe diese zunächst kleinere Mantisse der Tafeln von der zunächst größern Mantisse der Tafeln ab und bemerke dieselbe,

III. Man dividire mit der in II. gefundenen Differenz in die in I. erhaltene, und finde hierdurch drey Ziffer des Quotienten,

IV. Man setze die in III. erhaltenen drey Ziffer neben die in I. bekommenen und bestimme nach der gegebenen Kennziffer die Ganzen und die Bruchstellen dieser siebenzifferigen Zahl.

§. 489. Beyspiele zur Erläuterung.

I. Welche Zahl gehört zum Logarithmen 2,5387426?

Regel I. gibt zur 1ten logarithmischen Differenz: 423, und als Ziffer der Zahl: 3457.

Regel II. gibt zur 2ten logarithmischen Differenz: 1256.

1256|4320 (0,343
3768
5520
5024
4960
3768
192.

Regel IV. gibt folgende sieben Ziffer: 1257343 und daher, nach der Kennziffer 2, die Zahl 125,7343.

II. Man soll die zum Logarithmen 3,4518794 gehörig Zahl finden.

Regel I. gibt die 1te logarithmische Differenz 93 und die ganze Zahl = 2830.

Regel II. gibt zur 2ten logarithmischen Differe 1535.

Regel III. gibt diese Rechnung

1535|9300 (0,605
9210
9000
7675
1325.

Regel IV. gibt folgende sieben Ziffer: 2830605 woraus, wegen der Kennziffer 3, die zufindende Za = 2830,605 ist.

III. Was ist die Zahl des Logarithmen 0,2893476

Regel I. gibt die 1te Differenz = 2048 und d Ziffer: 1946 für die Zahl.

Regel II. gibt die 2te Differenz = 2232.

Regel III. gibt die Rechnung

2232|20480 (0,913
20088
3920
2232
6880
6696
184

Regel IV. gibt endlich folgende sieben Ziffer: 1946913 und daher, wegen Kennziffer 0, die Zahl: 1,946913.

IV. Welche Zahl gehört zum Logarithmen 5,8342793?

Regel I. gibt die 1te Differenz = 494 und die ersten vier Ziffer = 9827.

Regel II. gibt die 2te Differenz = 636.

Regel III. gibt

636|4940 (0,776
4452
4880
4452
4280
3816
464

Regel V. gibt die Ziffer 9827776 und, wegen Kennziffer 5, die zufindende Zahl: 982777,6.

V. Welche Zahl gehört zum Logarithmen 0,5740313 — 1?

Hier findet man unter der Kennziffer 3 in den Tafeln diesen Logarithmen ganz genau und die dabey stehende Zahl ist 3750. Da aber der angegebene Logarithme die Kennziffer — 1 hat, welche sich auf Zehntel bezieht, so ist die zufindende Zahl der Decimalbruch 0,375.

VI. Welche Zahl gehört dem Logarithmen 0,8374965 — 1?

Regel I. gibt die 1te Differenz = 343 und die ersten Ziffer der Zahl sind = 6878.

Regel II. gibt die 2te Differenz 631; daher gibt

Regel III. die Rechnung

631|3430(0,543
3155
2750
2524
2260
1893
367

Regel IV. gibt die Ziffer 6878543. Da nun die Kennziffer — 1 ist, so muß die zufindende Zahl mit Zehntel anfangen. Sie ist daher = 0,6878543.

VII. Welche Zahl gehört dem Logarithmen 0,8128434 — 2 zu?

Regel I. gibt die 1te Differenz 637 und die vier Ziffer 6498.

Da nun die Kennziffer = — 2 ist, wodurch die Zahl sich zunächst auf Hunderttel bezieht, so ist sie in ihren ersten Bruchstellen diese: 0,06498 und gibt daher schon die Hunderttausendtel der Einheit an. Da diese Theilchen in den meisten Fällen schon sehr klein sind, so ist durch sie die Zahl genau genug gefunden.

VIII. Welche Zahl gehört zum Logarithmen 0,9743285 — 3?

Da die zunächst kleinere Mantisse der Tafeln = 3,9743274 ist, wozu die Ziffer 9426 gehören, so wird, wegen Kennziffer — 3, welche sich auf Tausendtel bezieht, die dem gegebenen Logarithmen entsprechende Zahl

= 0,009426, welche bis auf die Milliontel der Einheit genau ist.

§. 490. Anmerkung. Nachdem nunmehr die beyden Haupt-Aufgaben zur practischen Logarithmen-Rechnung:

Für gegebene Zahlen die zugehörigen Logarithmen, und für gegebene Logarithmen die zugehörigen Zahlen zu finden,

aufgelöset worden sind, so soll die Anwendung dieser Rechnung in mannigfaltigen Beyspielen gezeigt werden. Den Anfängern ist mehrfache Uebung hierin vorzüglich zu empfehlen.

§. 491. Aufgabe. Durch Hülfe der Logarithmen zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden?

Auflösung. I. Wenn eines der äussern Glieder fehlt, so addire man die Logarithmen der beyden mittlern Glieder, ziehe den Logarithmen des einen gegebenen äussern Gliedes davon ab und suche die der Differenz zugehörige Zahl, so ist diese das zufindende Glied.

II. Fehlt aber eines der mittlern Glieder, so ziehe man von der Summe der Logarithmen der äussern Glieder den Logarithmen des vorhandenen mittlern Gliedes ab und suche zur Differenz die gehörige Zahl.

Beweis. Die Richtigkeit der Auflösung beruhet auf den oben bewiesenen Eigenschaften der Logarithmen.

Beyspiele. I. In der Proportion 7824 : 9741 = 6432 : x die Größe von x zu finden. Hier ist Log. x = Log. 9741 + Log. 6432 — Log. 7824. Dies gibt folgende Rechnung:

Log. 9741 =	3,9886035	addirt
Log. 6432 =	3,8083460	
	7,7969495	subtr.
Log. 7824 =	3,8934288	
	3,9035207	

Die dazu gehörige Zahl ist 8007,937.

II. Folgende Proportionen aufzulösen:

1) 327 : 845 = 743 : x

2) 873 : 7849 = 17 : x

3) 3817 : 942 = 9546 : x

4) x : 8741 = 276 : 9874

5) x : 1426 = 5674 : 8234

6) 38460 : x = 75360 : 538500

7) 13429 : x = 58324 : 97835

8) 98,7426 : 134,987 = x : 3846

9) 132,7645 : 7,684 = x : 478

10) 0,7398 : 8742,395 = x : 9374 u. s. w.

§. 492. Aufgabe. Zu zwey gegebenen Zahlen, durch Hülfe der Logarithmen, die mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Man addire die Logarithmen der beyden äussern Glieder, halbire die Summe und suche die ihr zugehörige Zahl, so ist diese das mittlere geometrische Proportionalglied.

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens folget aus den oben erwiesenen Eigenschaften der Logarithmen.

Beyspiele. I. In der Proportion 3875 : x = x : 489 den Werth von x zu berechnen.

Hier ist Log. $x = \frac{1}{2}$ (Log. 3875 + Log. 489). Dies gibt die Rechnung:

Log. 3875 = 3,5882717
Log. 489 = 2,6893089 } addirt
6,2775806 halbirt
gibt 3,1387903

Da nun die hierzu gehörige Zahl = 1376,544 ist, so ist auch 1376,544 die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 3875 und 489.

II. Man übe sich in Auflösung nachfolgender Beyspiele:

1) 739 : x = x : 542
2) 974 : x = x : 135
3) 1875 : x = x : 7395
4) 0,384 : x = x : 0,739
5) 16,78 : x = x : 0,035
6) 0,000147 : x = x : 3684
7) 31,473 : x = x : 6,3985
8) 1 : x = x : 0,3842
9) $\frac{759}{8371}$: x = x : $\frac{83}{819}$
10) $\frac{3781}{397}$: x = x : $\frac{9382}{7953}$ u. s. w.

§. 493. Aufgabe. Aus einer gegebenen Zahl die Wurzel irgend eines bestimmten Grades zu ziehen.

Auflösung. Man dividire den Logarithmen der gegebenen Zahl durch den Grad der zu findenden Wurzel, suche zu dem hierdurch entstehenden Logarithmen die gehörige Zahl, so ist diese die verlangte Wurzel.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung ist aus den oben bewiesenen Eigenschaften der Logarithmen leicht zu erkennen.

Beyspiele. I. Was ist $\sqrt{}$ 1748? Da Log. 1748 = 3, 2425414, so ist $\frac{3,2425414}{2}$ = 1,6212707 = Log. $\sqrt{}$ 1748. Da nun zum Logarithmen 3,6212707 die Zahl 4180,908 gehört, so gehört zum Logarithmen 1,6212707 die Zahl 41,80908, welche der Quadratwurzel von 1748 gleich ist.

II. Man übe sich im Nachrechnen folgender Beyspiele:

1) Log. $\sqrt{}$ 5 = 0,3494850
2) Log. $\sqrt{}$ 73567 = 2,4333415
3) Log. $\sqrt[3]{}$ 135 = 0,7101112
4) Log. $\sqrt[5]{}$ 35107 = 0,9090787
5) Log. $\sqrt[100]{}$ 13 = 0,0111394

7) Log. $\sqrt[4]{\frac{4}{9}} = 0{,}9295635 - 1$

8) Log. $\sqrt[16]{\frac{3587}{20593}} = 0{,}9525632 - 1$

9) Log. $\sqrt[17]{(954)^{12}} = 2{,}1032106$

10) Log. $\sqrt[11]{(\frac{12}{7})^{28}} = 0{,}5958482$

11) Log. $\sqrt[13]{(\frac{547}{9351})^{207}} = 0{,}2927210 - 4$

12) Log. $\sqrt[14]{(\frac{1}{3})^{187}} = 0{,}6270232 - 7$

13) Log. $\sqrt[20]{0{,}00534} = 0{,}9715943 - 1$

14) Log. $\sqrt[12]{(0{,}34576)^{7}} = 0{,}7309519 - 1$

15) Log. $\sqrt[32]{(356{,}27)^{11}} = 0{,}8771741.$

Diese Beyspiele sind aus Meier Hirsch's zu e
pfehlenden Sammlung von Beyspielen, und Formeln Au
gaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra, g
nommen.

§. 494. Anmerkung. Zur weitern Uebung in d
Logarithmen-Rechnung sollen hier noch folgende Beyspiele a
Kausler's gründlicher Schrift: Die wichtige Lehre von d
Logarithmen und ihrem Gebrauche beygebracht werden. D
Rechnungen selbst wird der Anfänger durchführen.

I. Was ist das vierte Glied der Proportion:
7905863 : 3985246 = 900857 : x. Man findet Lo
x = 5,6571617 und x = 454110,6.

II. Was ist das Resultat folgender Multiplication u
Division: $\frac{7956 \times 1357983 \times 95432}{96602 \times 5135742}$. Es wird Log. x =
3,3176941 und x = 2078,232 +.

III. Was ist der Werth von x in dem Ausdrucke:
$x = \frac{17{,}35492 \times 85{,}44367 \times 0{,}0054219}{565942 \times 1{,}00005 \times 0{,}012359}$. Hier wird Lo
x = 0,0604768 — 3 und x = 0,001149414.

IV. Wenn der pariser Fuß in 14400 gleiche Theile g
theilt wird, so hat der rheinländische 13913 und der wü
tembergische 12680 dieser Theile. Wieviel werden 26319

rheinländische Quadratfuße im würtembergischen Quadratfußen betragen?

Da 1 rh. F. : 1 würt. F. = 13913 : 12680, so ist 1 rh. Quadr. F. : 1 würt. Qu. F. = $13913^2 : 12680^2$. Daher sind 12680^2 rh. Q. F. = 13913^2 w. Q. F. Folglich hat man:

12680^2 rh. Q. F. : 263197 rh. Q. F. = 13913^2 w. Q. F. : x. w. Q. F., woraus $x = \frac{263197 \times 13913^2}{12680^2}$ wird.

Man erhält Log. $x = 5{,}5008840$ und $x = 316372{,}1$ würtembergische Quadratfuße.

V. Es werden $7349\frac{24}{67}$ Scheffel Frucht gegen Wein vertauscht. Der Scheffel gilt 9 fl. 43 kr. ($= 9\frac{43}{60}$ fl.) und der Eimer Wein gilt $67\frac{13}{59}$ Gulden. Wieviele Eimer wird man erhalten? Es sey y der Preis der zu vertauschenden Frucht und x die unbekannte Anzahl der Eimer, so ist: 1 Scheffel: $7349\frac{24}{67}$ Scheff. = $9\frac{43}{60}$ fl : y fl. und x Eimer : 1 Eimer = y fl : $67\frac{13}{59}$ fl.; folglich ist $x : 7349\frac{24}{67} = 9\frac{43}{60} : 67\frac{13}{59}$, woraus $x = \frac{492407 \times 583 \times 59}{60 \times 67 \times 3966}$ wird. Hier ist Log. $x = 3{,}0262662$ und $x = 1062{,}346$ Eimer Wein.

§. 495. Anmerkung. I. Aus der Lehre von den geometrischen Progressionen ist bekannt, daß die Gliederzahl oder n, durch a, e, u; durch a, e, s; durch a, u, s und durch e, u, s bestimmt werden kann. Die Formeln sind folgende:

für a, e, u wird $n = \frac{\text{Log. } u - \text{Log. } a}{\text{Log. } e} + 1$

für a, e, s wird $n = \frac{\text{Log. } (a + (e-1)s) - \text{Log. } a}{\text{Log. } e}$

für a, u, s wird $n = \frac{\text{Log. } u - \text{Log. } a}{\text{Log. } (s-a) - \text{Log. } (s-u)} + 1$

für e, u, s wird $n = \frac{\text{Log. } u - \text{Log. } (e\,u - (e-1)s)}{\text{Log. } e} + 1$

und man kann sich nunmehr in Berechnung derselben üben.

II. Zum Schlusse dieser Schrift sollen noch einige Anwendungen der Logarithmen-Rechnung auf Fragen aus der Forstwissenschaft gemacht werden, wozu nachfolgende Aufgaben dienen.

§. 496. I. Aufgabe. Wenn ein 20 jähriger Stamm 8 Cubikfuß, ein 80 jähriger von derselbigen

Art und unter gleichen Verhältnissen 64 Cubikfuß enthält, so fragt man: Wieviel beträgt vom 20sten bis zum 80sten Jahre der mittlere Zuwachs?

Auflösung. I. Wenn man den jährlichen mittlern Zuwachs für 1 Cubikfuß $= x$ setzt, so beträgt dieser 1 Cubikfuß am Ende des ersten Jahrs $1 + x$ und das Verhältniß des mittlern Zuwachses ist $1 : 1 + x$.

II. Weil nun $1 : 1 + x = 1 + x : (1 + x) \times (1 + x)$, so wird $(1 + x) \times (1 + x) = (1 + x)^2$ die gesammte Holzmasse am Ende des 2ten Jahrs; $(1 + x)^2 \times (1 + x) = (1 + x)^3$ diese Holzmasse am Schlusse des 3ten Jahrs, und somit $(1 + x)^{60}$ dieses Holzquantum am Ende des 60sten (hier des 80sten) Jahres seyn.

III. Da nun in obigem Falle für 8 Cubikfuße das Resultat des 60 jährigen Zuwachses $= 64$ Cubikfuße ist, so wird.

$$(1 + x)^{60} \times 8 = 64, \text{ folglich}$$

$$(1 + x)^{60} = \tfrac{64}{8} = 8 \text{ und}$$

$$1 + x = \sqrt[60]{8}, \text{ endlich}$$

$$x = \sqrt[60]{8} - 1, \text{ oder}$$

$$\text{Log. } x = (\tfrac{1}{60} \text{ Log. } 8) - 1.$$

IV. Nun ist Log: $8 = 0{,}9030900$, folglich $\frac{0{,}9030900}{60}$ $= 0{,}0150515$, wozu die Zahl 1,035265 gehört. Folglich ist $(1{,}035265) - 1 = 0{,}035265 =$ dem mittlern Zuwachse von einem Cubikfuß Holz des 20 jährigen Stammes, welcher nach dem 80sten Jahre 64 Cub. F. enthält.

V. Nennt man den Cubikgehalt des jüngern Stammes a, jenen des ältern Stammes b, die Zeit des Zuwachses (nach Jahren) n und die Größe des mittlern

Zuwachses für 1 Cubikfuß in 1 Jahre x, so entsteht für x diese Formel:

$$x = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)} - 1, \text{ oder}$$

$$\text{Log. } x = \frac{1}{n} (\text{Log. } b - \text{Log. } a) - 1.$$

VI. Auch entspringen aus dieser Formel noch folgende drey:

$$1.)\ n = \frac{\text{Log. } b - \text{Log. } a}{\text{Log. } x + 1}.$$

2.) $\text{Log. } b = n. \text{ Log. } (x + 1) + \text{Log. } a.$

3.) $\text{Log. } a = \text{Log. } b - n. \text{ Log. } (x + 1),$

in welchen n durch b, a und x, sodann b durch n, x und a und endlich a durch b, n und x bestimmt werden kann. Diese Größen in die zugehörigen Fragen einzukleiden, ist eine lehrreiche Uebung für Anfänger. Die zunächst folgenden Aufgaben dienen zur Erläuterung darüber.

§. 497. II. Aufgabe. Eine Waldfläche enthält gegenwärtig 2000 Klafter stehendes Holz. Wieviele Klafter wird dieselbe nach 60 Jahren enthalten, wenn der jährliche Zuwachs von 100 Klaftern auf $1\frac{1}{2}$ Klafter gerechnet wird?

Auflösung. I. Um den jährlichen Zuwachs von 1 Klafter zu erhalten, schliese man:

$100 : 1\frac{1}{2} = 1 : x$, wo $x = \frac{3}{200} = 0{,}015$ Klafter wird.

II. Nun ist diese Aufgabe der vorigen gleich, wenn man nur $2000 = a$, $60 = n$, $x = 0{,}015$ und den zu findenden Waldbestand $= b$ nennt.

III. Hierdurch wird (nach vor. §. VI. 2) nunmehr $\text{Log. } b = n. \text{ Log. } (x + 1) + \text{Log. } a$ oder $\text{Log. } b = 60 \times \text{Log. } (0{,}015 + 1) + \text{Log. } 2000$. Dies gibt $\text{Log. } b = 3{,}6889900$, wozu die Zahl 4886,4 gehört.

§. 498. Zusatz. Auch hier können noch folgend
Fragen gebildet, und nach den obigen Formeln beantwor
tet werden:

1.) Der jetzige Bestand eines Waldes ist 10000 Kla
ter und man kann auf 400 Klafter den jährliche
mittlern Zuwachs zu 5 Klafter rechnen. Wie gro
war der Bestand vor 80 Jahren? Hier ist die Forme
diese: Log. a = Log. b — n. Log. (x + 1)
Man findet Log. a = 3,7403920 und a = 5500
3 Klafter.

2.) In einem Districte sind 4000 Klafter nach Ver
lauf von 50 Jahren zu 8000 Klaftern herange
gewachsen. Was ist der jährliche Zuwachs vo
100 Klaftern?
Hier dient die Formel: Log. x = $\frac{1}{n}$ (Log. b —
Log. a) — 1. Man erhält Log. x = 0,0060206
und x = 0,01396 als Zuwachs von 1 Klafter. Folg
lich ist dieser Zuwachs von 100 Klaftern = 1,396

3) Nach wieviel Jahren werden 2000 Klafter zu 900
Klaftern angewachsen seyn, wenn 125 Klafter einen
jährlichen Zuwachs von 1 $\frac{3}{4}$ Klaftern geben?
Auf diesen Fall paßt die Formel:

$$n = \frac{\text{Log. b} - \text{Log. a}}{\text{Log. (x + 1)}}$$

und man erhält für n den
Werth von 108, 1 Jahren.

§. 499. III. Aufgabe. Wie groß muß der gegen
wärtige Bestand eines Waldes seyn, wenn man zu Ende
jeden Jahrs 200 Klafter schlagen und denselben nach Ab
fluß von 80 Jahren völlig abtreiben will; vorausgesetzt,
daß auf 100 Klafter der Zuwachs 1 $\frac{3}{4}$ Klafter beträgt?

Auflösung. I. Der zufindende Bestand heisse a, der jährliche Zuwachs einer Klafter u, die Zahl der jährlich zu schlagenden Klafter c, die Anzahl der Jahre, des Abtriebes n.

II. Der anfängliche Bestand a wird mit dem Zuwachse am Ende des ersten Jahrs $= (1 + u)\,a$. Da hievon c Klafter geschlagen werden, so bleiben zu Anfang des zweyten Jahrs noch $(1 + u)\,a - c$ Klafter übrig.

III. Der Waldbestand für das dritte Jahr wird durch die Proportion $1 : (1 + u) = (1 + u)\,a - c : y$ gefunden, wo $y = (1 + u)^2\,a - (1 + u)\,c$ ist. Hievon kommen zu Ende des dritten Jahrs wieder c Klafter hinweg, und es bleiben noch

$(1+u)^2a-(1+u)c-c=(1+u)^2a-[(1+u)-1]c$ Klafter

für den Anfang des 3ten Jahrs.

IV. Setzt man diese Rechnungen fort, so ergibt sich für den Waldbestand zu Ende des 3ten Jahrs:

$(1 + u)^3\,a - [1 + (1 + u) + (1 + u)^2]\,c$

Und zu Ende des 4.en Jahrs:

$(1 + u)^4\,a - [1 + (1 + u) + (1 + u)^2 + (1 + u)^3]\,c$

Folglich zu Ende des nten Jahrs:

$(1 + u)^n a - [1 + (1+u) + (1 + u)^2 + (1 + u)^3 \ldots (1 + u)^{n-1}]\,c$

und man erkennt sogleich, daß die in der Klammer stehenden Größen: 1; $1 + u$; $(1 + u)^2$ u. s. f. eine geometrische Progression bilden, deren Summe $= \frac{(1 + u)^n - 1}{u}$ ist.

V. Setzt man diese Summe in den Ausdruck von IV., so wird $(1 + u)^n\,a - \frac{[(1 + u)^n - 1]\,c}{u}$ der Bestand

dieser Zeit gänzlich abgetrieben seyn soll, so muß

$$(1+u)^n\ a - \frac{[(1+u)^n - 1]c}{u} = 0 \text{ seyn.}$$ Di

gibt aber:

$$(1+u)^n\ a = \frac{[(1+u)^n - 1]c}{u};$$ folglich

$$a = \frac{[(1+u)^n - 1]c}{(1+u)^n u},$$ welches der Ausdruck f

den gegenwärtigen Bestand des Waldes ist.

VI. Wird diese Formel für die in der Aufgabe an gebenen Zahlenwerthe berechnet, so findet man L $a = 3{,}9332836$ und $a = 8575{,}9$ Klafter für den fänglichen Bestand des Forstes.

§. 500. IV. Aufgabe. Ein Wald enthält 30 Klafter stehendes Holz Der jährliche Zuwachs von Klaftern beträgt $\frac{3}{4}$ Klafter. Wie lange wird man dem Holzbestande ausreichen, wenn zu Ende je Jahrs 100 Klafter geschlagen werden?

Auflösung. I. Da in der Formel des vor. der Werth von n durch a, u und c bestimmt ist, so n dieser Werth gehörig entwickelt werden.

II. Da $(1+u)^n\ a - \frac{[(1+u)^n - 1]}{u} c = 0$, so

$(1+u)^n\ au - [(1+u)^n - 1]c = 0$, und

$(1+u)^n\ au - (1+u)^n\ c + c = 0$, somit

$c = (1+u)^n\ c - (1+u)^n\ au$, oder, weil $(1+$ gemeinschaftlicher Factor von $c - au$ ist,

$c = (c - au) \times (1+u)^n$ und

$$\frac{c}{c - au} = (1+u)^n;$$ folglich ist auch

Log. c — Log. (c — au) = n. Log. (1 + u), woraus

$$n = \frac{\text{Log. c} - \text{Log. (c} - \text{au)}}{\text{Log. (1} + \text{u)}}$$ wird.

III. Setzt man die Werthe a = 3000, c = 100 und $u = \frac{1}{80} = 0{,}0125$ (denn es ist $60 : \frac{3}{4} = 1 : u$) in diese Formel, so ergibt sich $n = 37{,}8$ Jahre.

§. 501. V. Aufgabe. Der gegenwärtige Bestand eines Forstes ist 4000 Klafter, und der jährliche Zuwachs auf 1000 Klafter beträgt 12 Klafter. Wieviele Klafter wird man zu Ende jedes Jahrs schlagen können, um den Wald nach 60 Jahren abzutreiben?

Auflösung. I. Es ist klar, daß man in der Formel der beyden vor. §§. den Werth von c durch a, u und n bestimmen müsse.

II. Nach dem vor. §. II. war:

$(1+u)^n\,au - [(1+u)^n - 1]\,c = 0$ daher ist

$(1+u)^n\,au = [(1+u)^n - 1]\,c$, folglich

$$c = \frac{(1+u)^n\,au}{(1+u) - 1}.$$

III. Setzt man die Werthe a = 4000, n = 60 und (wegen 1000 : 12 = 1 : u) $u = \frac{12}{1000} = 0{,}012$ in diese Formel, und berechnet c durch Hülfe der Logarithmen, so wird c = 93,905 Klafter, welche zu Ende jedes Jahrs geschlagen werden können.

§. 502. VI. Aufgabe. Der gegenwärtige Bestand eines Waldes ist = a, der jährliche Zuwachs auf 1 Klafter = u und es werden zu Ende jedes Jahrs c Klafter geschlagen. Wieviel wird der Bestand nach n Jahren betragen?

Auflösung. I. Es ist aus der Natur dieser Frage einleuchtend, daß nach Verschiedenheit der Werthe von a, u, c und n der Waldbestand, welcher R heissen

werden könne. Auch kann es geschehen, daß $R = a$, oder $R > a$, oder $R < a$ werde.

II. Um diese Fälle zu entwickeln, lege man die Formel der vor. §§. $(1+u)^n a - \left(\frac{(1+u)^n - 1}{u}\right) c = 0$ zum Grunde, welche hier in folgende verwandelt wird: $(1+u)^n a - \left(\frac{(1+u)^n - 1}{u}\right) c = R$. Dies gibt: $(1+u)^n a u - [(1+u)^n - 1] c = u R$; oder, weil $(1+u)^n$ als gemeinschaftlicher Factor anzusehen ist, $(1+u)^n \times \left(\frac{a u - c}{u}\right) + \frac{c}{u} = R$, endlich

$$(1+u)^n \times \left(a - \frac{c}{u}\right) + \frac{c}{u} = R.$$

III. Da nun (nach den vorhergehenden §§.) $(1+u)^n \times a$ der Ausdruck für den Holzbestand der Klafterzahl a bey dem Zuwachse u nach Verlauf von n Jahren ist, so hängt der Werth von $(1+u)^n \times \left(a - \frac{c}{u}\right)$ von der Größe des Bruchs $\frac{c}{u}$ in Vergleich mit a ab. Wäre $\frac{c}{u} = a$, so würde $a - \frac{c}{u} = 0$, und $a = R$ d. h. der anfängliche Waldbestand bliebe nach dieser Annahen durchaus unverändert.

IV. Wäre $\frac{c}{u} < a$, so würde $R > a$. Denn weil u keine negative Größe ist, so muß $(1+u)^n$ größer als 1 seyn. Man setze $(1+u)^n = z$. Da ferner $\frac{c}{u} < a$ ist, so sey $\frac{c}{u} = a - d$, wo d die Differenz von $a - \frac{c}{u}$ bedeutet. Daher wird nunmehr die Formel in II. diese:

$z \times (a - a + d) + a - d = R$ d. h.

$z\,d + a - d = R$, oder

$z\,d - d + a = R$, oder

$d\,(z-1) + a = R$.

Da nun $z-1$ positiv ist (wegen $z > 1$) so ist auch

$d\,(z-1)$ positiv und

$d\,(z-1) + a$ ist $> a$, d. h.

$R > a$.

Wenn also $\frac{c}{u} < a$ ist, so wird der Bestand nach n Jahren noch größer, als der anfängliche Bestand a seyn, obwohl am Ende jedes Jahrs c Klafter geschlagen werden.

V. Setzte man $\frac{c}{u} > a$, und nähme $\frac{c}{u} = a + d$ an, so würde nunmehr

$z \times [a - (a + d)] + a + d = R$ d. h.

$z\,(a - a - d) + a + d = R$, oder

$-z\,d + a + d = R$ oder

$a - z\,d + d = R$.

Da nun $z > 1$ ist, so ist auch $z\,d > d$ und $a - z\,d + d < a$. Für diese Annahme wird also der Bestand nach n Jahren kleiner, als der anfängliche seyn.

§. 503. Aufgabe. Der gegenwärtige Holzbestand eines Waldes ist 4500 Klafter. Es werden zu Ende jedes Jahres 100 Klafter geschlagen und der Zuwachs beträgt auf 100 Klafter $1\frac{1}{2}$ Klafter. Was wird der Bestand nach 30 Jahren seyn?

Auflösung. Hier ist $a = 4500$, $c = 100$, $u = 0{,}015$ (denn $100 : \frac{3}{2} = 1 : \frac{3}{200} = 0{,}015$) und $n = 30$. Setzt man diese Werthe in die Formel:

$(1+u)^n \times (a - \frac{c}{u}) + \frac{c}{u} = R$, so wird $R =$

ist, weil $\frac{100}{0,015} = \frac{100000}{15} = 6666\frac{2}{3}$, so hat sich nach vor. §. V. der anfängliche Bestand nach 30 Jahren vermindert.

§. 504. Aufgabe. Der gegenwärtige Bestand des Forstes sey 4500 Klafter. Man schlägt zu Ende jedes Jahrs 60 Klafter und der jährliche Zuwachs beträgt von 100 Klafter $1\frac{1}{2}$ Klafter. Was wird der Bestand nach 30 Jahren seyn?

Auflösung. Hier ist $a = 4500$, $c = 60$, $n = 30$ und $u = 0,015$ wie vorhin. Berechnet man die Formel des vor. §. so wird $R = 4781,53$ Klafter. Der Bestand hat also nach 30 Jahren zugenommen, weil hier $\frac{c}{u} = \frac{60}{0,015} = \frac{60000}{15} = 4000 < a$, d. h. kleiner, als 4500 ist, wie dieses nach dem vor. §. IV. geschehen muß.

§. 505. Zusatz. Setzte man im vor. §. $a = 4500$, $c = 67,5$, $n = 30$ nnd $u = 0,015$, so wäre $\frac{c}{u} = a$(denn $\frac{67,5}{0,015} = 4500$) und nach vor. §. III. wird hier wirklich $R = a = 4500$ Klafter.

§. 506. Anmerkung. Vorstehende, aus der Forstwissenschaft gewählte Beyspiele sind, mit einigen Abänderungen und Erläuterungen, aus der sehr zu empfehlenden Schrift: Sammlung der vorzüglichsten Forstrechnungs-Aufgaben, zum Gebrauche und zur Selbstübung für angehende Forstmänner und Oeconomen, von G. A. Fischer. Dritte Auflage. Dresden 1817 (Preis 1 Thlr. 6 Gr.) genommen worden.

Tafel

der

Logarithmen

für

alle ganze Zahlen

von

1 bis 10,000.

1	0 0000000	2.0043214	2.3031961	2.4785665
2	3010300	086002	053514	800069
3	4771212	128372	074960	814426
4	6020600	170333	096302	828736
5	6989700	211893	117539	842998
6	7781512	253059	138672	857214
7	8450480	293838	159703	871384
8	9030900	334238	180633	885507
9	9542425	374265	201463	899585
10	1.0000000	413927	222193	913617
11	0413927	453230	242824	927604
12	0791812	492180	263359	941546
13	1.1139433	530784	283796	955443
14	1461280	569048	304138	969296
15	1760913	606978	324385	983105
16	1.2041200	644580	344537	996871
17	2304489	681859	364597	2.5010593
18	2552725	718820	384565	024271
19	2787536	755470	404441	037907
20	1.3010300	791812	424227	051500
21	3222193	827854	443923	065050
22	3424227	863598	463530	078559
23	3617278	899051	483049	092025
24	3802112	934217	502480	105450
25	3979400	969100	521825	118834
26	1.4149733	2.1003705	541084	132176
27	4313638	038037	560259	145477
28	4471580	072100	579348	158738
29	4623980	105897	598355	171959
30	4771212	139433	617278	185139
31	1.4913617	172713	636120	198280
32	5051500	205739	654880	211381
33	5185139	238516	673559	224442

z	0.	100.	200.	300.
34	1.5314789	2.1271048	2.3692159	2.5237465
35	440680	303338	710679	250448
36	563025	335389	729120	263393
37	682017	367206	747483	276299
38	797836	398791	765770	289167
39	910646	430148	783979	301997
40	1.6020600	461280	802112	314789
41	127839	492191	820170	327544
42	232493	522883	838154	340261
43	334685	553360	856063	352941
44	434527	583625	873898	365584
45	532125	613680	891661	378191
46	627578	643528	909351	390761
47	720979	673173	926969	403295
48	812412	702617	944517	415792
49	901961	731863	961993	428254
50	989700	760913	979400	440680
51	1.7075702	789769	996737	453071
52	160033	818436	2.4014005	465427
53	242759	846914	031205	477747
54	323938	875207	048337	490033
55	403627	903317	065402	502283
56	481880	931246	082400	514500
57	558748	958996	099331	526682
58	634280	986571	116197	538830
59	708520	2.2013971	132998	550944
60	781512	041200	149733	563025
61	853298	068259	166405	575072
62	923917	095150	183013	587086
63	993405	121876	199557	599066
64	1.8061800	148438	216039	611014
65	129133	174839	232459	622929
66	195439	201081	248816	634811

z	0.	100.	200.	300.
67	1.8260748	2.2227165	2.4265113	2.5646661
68	325089	53093	81348	58478
69	388491	78867	97523	70264
70	450980	2.2304489	2.4313638	82017
71	512583	29961	29693	93739
72	573325	55284	45689	2.5705429
73	633229	80461	61626	17088
74	692317	2.2405492	77506	28716
75	750613	30380	93327	40313
76	808136	55127	2.4409091	51878
77	864907	79733	24798	63413
78	920916	2.2504200	40448	74918
79	976271	28530	56042	86392
80	1.9030900	52725	71580	97836
81	084850	76786	87063	2.5809250
82	138138	2.2600714	2.4502491	20634
83	190781	24511	17864	31988
84	242793	48178	33183	43312
85	294189	71717	48449	54607
86	344984	95129	63660	65873
87	395192	2.2718416	78819	77110
88	444827	51578	93925	88317
89	493900	64618	2.4608978	99496
90	542425	87536	23980	2.5910646
91	590414	2.2810334	38930	21768
92	637878	33012	53828	32861
93	684829	55573	68676	43925
94	731278	78017	83473	54962
95	777236	2.2900346	98220	65971
96	822712	22561	2.4712917	76952
97	867717	44662	27564	87905
98	912261	66652	42163	98831
99	956352	88531	56712	2.6009729
100	1.0000000	2.3010300	71212	20600

0	2.6020600	2.6989700	2.7781512	2.8450980
1	31444	98377	88745	57180
2	42260	2.7007037	95965	63371
3	53050	15680	2.7803173	69553
4	63814	24305	10369	75727
5	74550	32914	17554	81891
6	85260	41505	24726	88047
7	95944	50080	31887	94194
8	2.6106602	58637	39036	2.8500333
9	17233	67178	46173	06462
10	27839	75702	53298	12583
11	38418	84209	60412	18696
12	48972	92700	66514	24800
13	59500	2.7101174	74605	30895
14	70003	09631	81684	36982
15	80481	18072	88751	43060
16	90933	26497	95807	49130
17	2.6201360	34905	2.7902852	55191
18	11763	43298	09885	61244
19	22140	51674	16906	67289
20	32493	60033	23917	73325
21	42821	68377	30916	79353
22	53124	76705	37904	85372
23	63404	85017	44880	91383
24	73659	93313	51846	97386
25	83889	2.7201593	58800	2.8603380
26	94096	09857	65744	09366
27	2.6304279	18106	72675	15344
28	14438	26339	79596	21314
29	24573	34557	86506	27275
30	34685	42759	93405	33229
31	44773	50945	2.8000294	39174
32	54837	59116	07171	45111
33	64879	67272	14037	51040

34	2.6374897	2.7275413	2.8020893	2.8656611
35	84893	83538	27737	62873
36	94865	91648	34571	68778
37	2.6404814	99743	41394	74675
38	14741	2.7307823	48207	80564
39	24645	15888	55009	86444
40	34527	23938	61800	92317
41	44386	31973	68580	98182
42	54223	39993	75350	2.8704039
43	64037	47998	82110	09888
44	73830	55989	88859	15729
45	83600	63965	95597	21563
46	93349	71926	2.8102325	27388
47	2.6503075	79873	09043	33206
48	12780	87806	15750	39016
49	22463	95723	22447	44818
50	32125	2.7403627	29134	50613
51	41765	11516	35810	56399
52	51384	19391	42476	62178
53	60982	27251	49132	67950
54	70558	35098	55777	73713
55	80114	42930	62413	79469
56	89648	50748	69038	85218
57	99162	58552	75654	90959
58	2.6608655	66342	82259	96692
59	18127	74118	88854	2.8802418
60	27578	81880	95439	08136
61	37009	89629	2.8202015	13847
62	46420	97363	08580	19550
63	55810	2.7505084	15135	25245
64	65180	12791	21681	30934
65	74529	20484	28216	36614
66	83859	28164	34742	42288
67	93169	35831	41258	47954

67	2.6693169	2.7535831	2.8241258	2.8847954
68	2.6702458	43483	47765	53612
69	11728	51123	54261	59263
70	20979	58748	60748	64907
71	30209	66361	67225	70544
72	39420	73960	73693	76173
73	48611	81546	80151	81795
74	57783	89119	86599	87410
75	66936	96678	93038	93017
76	76069	2.7604225	99467	98617
77	85184	11758	2.8305887	2.8904210
78	94279	19278	12297	09796
79	2.6803355	26786	18698	15375
80	12412	34280	25089	20946
81	21451	41761	31471	26510
82	30470	49230	37844	32067
83	39471	56685	44207	37618
84	48454	64128	50561	43161
85	57417	71559	56906	48696
86	66363	78976	63241	54225
87	75290	86381	69567	59747
88	84198	93773	75884	65262
89	93089	2.7701153	82192	70770
90	2.6901961	08520	88491	76271
91	10815	15875	94780	81765
92	19651	23217	2.8401061	87252
93	28469	30547	07332	92732
94	37269	37864	13595	98205
95	46052	45170	19848	2.9003671
96	54817	52463	26092	09131
97	63564	59743	32328	14583
98	72293	67012	38554	20029
99	81005	74268	44772	25468
100	89700	81512	50980	30900

0	2.9030900	2.9542425	3.0000000	3.0413927
1	36325	47248	03431	17873
2	41744	52065	08677	21816
3	47155	56877	13009	25755
4	52560	61684	17337	29691
5	57959	66486	21661	33623
6	63350	71282	25980	37551
7	68735	76073	30295	41476
8	74114	80858	34605	45398
9	79485	85639	38912	49315
10	84850	90414	43214	53230
11	90208	95184	47511	57140
12	95560	99948	51805	61048
13	2.9100905	2.9604703	56094	64952
14	06244	09462	60379	68852
15	11576	14211	64660	72749
16	16901	18955	68937	76642
17	22220	23693	73209	80532
18	27533	28427	77478	84418
19	32839	33155	81742	88301
20	38138	37878	86002	92180
21	43431	42596	90257	96056
22	48718	47309	94509	99928
23	53998	52017	98756	3.0503797
24	59272	56720	3.0102999	07663
25	64539	61417	07239	11525
26	69800	66110	11474	15384
27	75055	70797	15704	19239
28	80303	75480	19931	23091
29	85545	80157	24154	26939
30	90781	84829	28372	30784
31	96010	89497	32587	34626
32	2.9201233	94159	36797	38464
33	06450	98816	41003	42299

34	2.9211660	2.9703469	3.0145205	3.0546130
35	16865	08116	4940	49958
36	22063	12758	53597	53783
37	27254	17396	57787	57604
38	32440	22028	61973	61423
39	37620	26650	66155	65237
40	42793	31278	70333	69048
41	47960	35896	74507	72856
42	53121	40509	78677	76661
43	58276	45117	82843	80462
44	63424	49720	87005	84260
45	68567	54318	91163	88055
46	73704	58911	95317	91846
47	78834	63500	99467	95634
48	83958	68083	3.0203613	99419
49	89077	72662	07755	3.0603200
50	94189	77236	11893	06978
51	99296	81805	16027	10753
52	2.9304396	86369	20157	14525
53	09490	90929	24284	18293
54	14579	95484	28406	22058
55	19661	2.9800034	32524	25820
56	24738	04579	36639	29578
57	29808	09119	40750	33334
58	34873	13655	44857	37085
59	39932	18186	48960	40034
60	44984	22712	53059	44530
61	50031	27234	57154	48322
62	55073	31751	61245	52061
63	60108	36263	95333	55797
64	65137	40770	69416	59530
65	70161	45273	73496	63259
66	75179	49771	77572	66985
67	80191	54265	81644	70708

67	2.9380191	2.9854265	3.0281644	3.0670708
68	85197	58753	85712	74428
69	90198	63238	89777	78145
70	95192	67717	93838	81859
71	2.9400181	72192	97895	85569
72	05165	76663	3.0301948	89276
73	10142	81128	05997	92980
74	15114	85589	10043	96681
75	20080	90046	14085	3.0700379
76	25041	94498	18123	04073
77	29996	98946	22157	07765
78	34945	2.9903388	26188	11453
79	39889	07827	30214	15138
80	44827	12261	34237	18820
81	49759	16690	38257	22499
82	54686	21115	42273	26175
83	59607	25535	46284	29847
84	64523	29951	50293	33517
85	69433	34362	54297	37183
86	74337	38769	58298	40847
87	79236	43171	62295	44507
88	84130	47569	66288	48164
89	89018	51963	70279	51818
90	93900	56352	74265	55470
91	98777	60736	78247	59118
92	2.9503648	65117	82226	62762
93	08514	69492	86201	66404
94	13375	73864	90173	70043
95	18230	78231	94141	73679
96	23080	82593	98105	77312
97	27924	86951	3.0402066	80941
98	32763	91305	06023	84568
99	37597	95655	09977	88192
100	42425	3.0000000	13927	91812

z	1200.	1300.	1400.	1500.
0	3.0791812	3.1139433	3.1461280	3.1760913
1	95430	42773	64381	63807
2	99045	46110	67480	66699
3	3.0802656	49444	70577	69590
4	06265	52776	73671	72478
5	09870	56105	76763	75365
6	13473	59432	79853	78250
7	17073	62756	82941	81132
8	20669	66077	86029	84013
9	24263	69396	89110	86892
10	27854	72713	92191	89769
11	31441	76027	95270	92645
12	35026	79338	98347	95518
13	38608	82647	3.1501422	98389
14	42187	85954	04494	3.1801259
15	45763	89257	07564	04126
16	49336	92559	10632	06992
17	52906	95858	13698	09856
18	56473	99154	16762	12718
19	60037	3.1202448	19824	15578
20	63598	05739	22883	18436
21	67156	09028	25941	21292
22	70712	12314	28996	24146
23	74264	15598	32049	26999
24	77814	18880	35100	29850
25	81361	22159	38149	32698
26	84905	25435	41195	35545
27	88446	28709	44240	38390
28	91984	31981	47282	41233
29	95519	35250	50322	44075
30	99051	38516	53360	46914
31	3.0902580	41780	56396	49752
32	06107	45042	59430	52588
33	09631	48301	62462	55421

z	1200.	1300.	1400.	1500.
34	3.09153151	3.125 558	3.1565491	3.1858253
35	16669	54813	68519	61084
36	20185	58064	71544	63912
37	23697	61314	74568	66739
38	27206	64561	77589	69563
39	30713	67806	80608	72386
40	34217	71048	83625	75207
41	37718	74288	86640	78026
42	41216	77525	89653	80844
43	44711	80760	92663	83659
44	48204	83993	95672	86473
45	51693	87223	98678	89285
46	55180	90450	3.1601683	92095
47	58664	93676	04685	94903
48	62146	96899	07686	97709
49	65624	3.1300119	10684	3.1900514
50	69100	03338	13680	03317
51	72573	06553	16674	06118
52	76043	09767	19666	08917
53	79511	12978	22656	11714
54	82975	16187	25644	14510
55	86437	19393	28630	17304
56	89896	22597	31614	20096
57	93353	25798	34595	22886
58	96806	28998	37575	25674
59	3.10000257	32195	40553	28461
60	03705	35389	43528	31246
61	07151	38581	46502	34029
62	10593	41771	49474	36810
63	14033	44958	52443	39590
64	17471	48144	55411	42367
65	20905	51326	58376	45143
66	24337	54507	61340	47917
67	27766	57685	64301	50690

0	3.0791812	3.1139433	3.1461280	3.1760913
1	95430	42773	64381	63807
2	99045	46110	67480	66699
3	3.0802656	49444	70577	69590
4	06265	52776	73671	72478
5	09870	56105	76763	75365
6	13473	59432	79853	78250
7	17073	62756	82941	81132
8	20669	66077	86029	84013
9	24263	69396	89110	86892
10	27854	72713	92191	89769
11	31441	76027	95270	92645
12	35026	79338	98347	95518
13	38608	82647	3.1501422	98389
14	42187	85954	04494	3.1801259
15	45763	89257	07564	04126
16	49336	92559	10632	06992
17	52906	95858	13698	09856
18	56473	99154	16762	12718
19	60037	3.1202448	19824	15578
20	63598	05739	22883	18436
21	67156	09028	25941	21292
22	70712	12314	28996	24146
23	74264	15598	32049	26999
24	77814	18880	35100	29850
25	81361	22159	38149	32698
26	84905	25435	41195	35545
27	88446	28709	44240	38390
28	91984	31981	47282	41233
29	95519	35250	50322	44075
30	99051	38516	53360	46914
31	3.0902580	41780	56396	49752
32	06107	45042	59430	52588
33	09631	48301	62462	55421

34	3.0913151	3.125 558	3.1565491	3.1858253
35	16669	54813	68519	61084
36	20185	58064	71544	63912
37	23697	61314	74568	66739
38	27206	64561	77589	69563
39	30713	67806	80608	72386
40	34217	71048	83625	75207
41	37718	74288	86640	78026
42	41216	77525	89653	80844
43	44711	80760	92663	83659
44	48204	83993	95672	86473
45	51693	87223	98678	89285
46	55180	90450	3.1601683	92095
47	58664	93676	04685	94903
48	62146	96899	07686	97709
49	65624	3.1300119	10684	3.1900514
50	69100	03338	13680	03317
51	72573	06553	16674	06118
52	76043	09767	19666	08917
53	79511	12978	22656	11714
54	82975	16187	25644	14510
55	86437	19393	28630	17304
56	89896	22597	31614	20096
57	93353	25798	34595	22886
58	96806	28998	37575	25674
59	3.1000257	32195	40553	28461
60	03705	35389	43528	31246
61	07151	38581	46502	34029
62	10593	41771	49474	36810
63	14033	44958	52443	39590
64	17471	48144	55411	42367
65	20905	51326	58376	45143
66	24337	54507	61340	47917
67	27766	57685	64301	50690

z	1200.	1300.	1400.	1500.
67	3.1027766	3.1357685	3.1664301	3.1950690
68	31192	60861	67260	53460
69	34616	64034	70218	56229
70	38037	67206	73173	58996
71	41455	70374	76127	61762
72	44871	73541	79078	64525
73	48284	76705	82027	67287
74	51694	79867	84975	70047
75	55102	83027	87920	72806
76	58507	86184	90863	75562
77	61909	89339	93805	78317
78	65308	92492	96744	81070
79	68705	95643	99682	83821
80	72100	98791	3.1702617	86571
81	75491	3.1401937	05550	89319
82	78880	05080	08482	92065
83	82266	08222	11411	94809
84	85650	11361	14339	97552
85	89031	14498	17264	3.2000293
86	92410	17632	20188	03032
87	95785	20765	23110	05769
88	99159	23895	26029	08505
89	3.1102529	27022	28947	11239
90	05897	30148	31863	13971
91	09262	33271	34776	16702
92	12625	36392	37688	19431
93	15985	39511	40598	22158
94	19343	42628	43506	24883
95	22698	45742	46412	27607
96	26050	48854	49316	30329
97	29400	51964	52218	33049
98	32747	55072	55118	35768
99	36091	58177	58016	38485
100	39433	61280	60913	41200

0	3.2041200	3.2304489	3.2552725	3.2787536
1	43913	07043	55137	89821
2	46625	09596	57548	92105
3	49335	12146	59957	94388
4	52044	14696	62365	96669
5	54750	17244	64772	98950
6	57455	19790	67177	3.2801229
7	60159	22335	69582	03507
8	62860	24879	71984	05784
9	65560	27421	74386	08059
10	68259	29961	76786	10334
11	70955	32500	79184	12607
12	73650	35038	81582	14879
13	76344	37574	83978	17150
14	79035	40108	86373	19419
15	81725	42641	88766	21688
16	84414	45173	91158	23955
17	87100	47703	93549	26221
18	89785	50232	95939	28486
19	92468	52759	98327	30750
20	95150	55284	3.2600714	33012
21	97830	57809	03099	35274
22	3.2100508	60331	05484	37534
23	03185	62853	07867	39793
24	05860	65373	10248	42051
25	08534	67891	12629	44307
26	11205	70408	15008	46563
27	13876	72923	17385	48817
28	16544	75437	19762	51070
29	19211	77950	22137	53322
30	21876	80461	24511	55573
31	24540	82971	26883	57823
32	27201	85479	29255	60071
33	29862	87986	31625	62318

34	3.2132521	3.2390491	3.2633993	3.2864565
35	35178	92995	36361	66810
36	37833	95497	38727	69054
37	40487	97998	41092	71296
38	43139	3.2400498	43455	73538
39	45789	02996	45817	75778
40	48438	05492	48178	78017
41	51086	07988	50538	80255
42	53732	10481	52896	82492
43	56376	12974	55253	84728
44	59018	15465	57609	86963
45	61659	17954	59964	89196
46	64298	20442	62317	91428
47	66936	22929	64669	93659
48	69572	25414	67020	95889
49	72206	27898	69369	98118
50	74839	30380	71717	3.2900346
51	77471	32861	74064	02573
52	80100	35341	76410	04798
53	82728	37819	78754	07022
54	85355	40296	81097	09246
55	87980	42771	83439	11468
56	90603	45245	85780	13688
57	93225	47718	88119	15908
58	95845	50189	90457	18127
59	98464	52658	92794	20344
60	3.2201081	55127	95129	22561
61	03696	57594	97464	24776
62	06310	60059	99797	26990
63	08922	62523	3.2702128	29203
64	11533	64986	04459	31415
65	14142	67447	06788	33626
66	16750	69907	09116	35835
67	19356	72365	11443	38044

67	3.2219356	3.2472365	3.2711443	3.2938044
68	21960	74823	13769	40251
69	24563	77278	16093	42457
70	27165	79733	18416	44662
71	29764	82186	20738	46866
72	32363	84637	23058	49069
73	34959	87087	25378	51271
74	37555	89536	27696	53471
75	40148	91984	30013	55671
76	42740	94430	32328	57869
77	45331	96874	34643	60067
78	47920	99318	36956	62263
79	50507	3.2501759	39268	64458
80	53093	04200	41578	66652
81	55677	06639	43888	68845
82	58.60	09077	46196	71056
83	60841	11513	48503	73227
84	63421	13948	50809	75417
85	65999	16382	53113	77605
86	68576	18815	55417	79792
87	71151	21246	57719	81979
88	73724	23675	60020	84164
89	76296	26103	62320	86348
90	78867	28530	64618	88531
91	81436	30956	66915	90713
92	84001	33380	69211	92893
93	86570	35803	71506	95073
94	89134	38224	73800	97251
95	91697	40645	76092	99429
96	94258	43063	78383	3.3001605
97	96818	45481	80673	03781
98	99377	47897	82962	05955
99	3.2301934	50312	85250	08128
100	04489	52725	87536	10300

z	2000.	2100.	2200.	2300.
0	3.3010300	3.3222193	3.3424227	3.3617278
1	12471	24260	26200	19166
2	14641	26327	28173	21053
3	16809	28393	30145	22939
4	18977	30457	32116	24825
5	21144	32521	34086	26709
6	23309	34584	36055	28593
7	25474	36645	38023	30476
8	27637	38706	39991	32358
9	29799	40766	41957	34339
10	31961	42825	43923	36120
11	34121	44882	45887	37999
12	36280	46939	47851	39878
13	38438	48995	49814	41756
14	40595	51050	51776	43633
15	42751	53104	53737	45510
16	44905	55157	55698	47386
17	47059	57209	57657	49260
18	49212	59260	59615	51134
19	51363	61310	61573	53007
20	53514	63359	63530	54880
21	55663	65407	65486	56751
22	57812	67454	67441	58622
23	59959	69500	69395	60492
24	62105	71545	71348	62361
25	64250	73589	73300	64230
26	66394	75633	75252	66097
27	68537	77675	77202	67964
28	70679	79716	79152	69830
29	72820	81757	81101	71695
30	74960	83796	83049	73559
31	77099	85834	84996	75423
32	79237	87872	86942	77285
33	81374	89909	88887	79147

z	2000.	2100.	2200.	2300.
34	3.3083509	3.3291944	3.3490832	3.3681008
35	85644	93979	92775	82869
36	87778	96012	94718	84728
37	89910	98045	96660	86587
38	92042	3.3300077	98601	88445
39	94172	02108	3.3500541	90302
40	96302	04138	02480	92159
41	98430	06167	04419	94014
42	3.3100557	08195	06356	95869
43	02684	10222	08293	97723
44	04809	12248	10228	99576
45	06933	14273	12163	3.3701428
46	09056	16297	14098	03280
47	11178	18320	16031	05131
48	13299	20343	17963	06981
49	15420	22364	19895	08830
50	17539	24385	21825	10679
51	19657	26404	23755	12526
52	21774	28423	25684	14373
53	23889	30440	27612	16219
54	26004	32457	29539	18065
55	28118	34473	31465	19909
56	30231	36488	33391	21753
57	32343	38501	35316	23596
58	34454	40514	37239	25438
59	36563	42526	39162	27279
60	38672	44537	41084	29120
61	40780	46548	43006	30960
62	42887	48557	44926	32799
63	44992	50565	46846	34637
64	47097	52572	48764	36475
65	49200	54579	50682	38311
66	51303	56585	52599	40147
67	53405	58589	54515	41983

z	2000.	2100.	2200.	2300.
67	3.3153405	3.3358589	3.3554515	3.3741983
68	55505	60593	56430	43817
69	57605	62596	58345	45651
70	59703	64597	60259	47483
71	61801	66598	62171	49316
72	63897	68598	64083	51147
73	65993	70597	65994	52977
74	68087	72595	67905	54807
75	70181	74593	69814	56636
76	72273	76589	71723	58464
77	74365	78584	73630	60292
78	76455	80579	75537	62118
79	78545	82572	77443	63944
80	80633	84565	79348	65769
81	82721	86557	81253	67594
82	84807	88547	83156	69418
83	86893	90537	85059	71240
84	88977	92526	86961	73062
85	91061	94514	88862	74884
86	93143	96501	90762	76704
87	95224	98488	92662	78524
88	97305	3.3400473	94560	80343
89	99384	02458	96458	82161
90	3.3201463	04441	98355	83979
91	03540	06424	3.3600251	85796
92	05617	08405	02146	87612
93	07692	10386	04041	89427
94	09767	12366	05934	91241
95	11840	14345	07827	93055
96	13913	16323	09719	94868
97	15984	18301	11610	96680
98	18055	20277	13500	98492
99	20124	22252	15390	3.3800302
100	22193	24227	17278	02112

0	3.3802112	3.3979400	3.4149733	3.4313638
1	03922	81137	51404	56246
2	05730	82873	53073	16853
3	07538	84608	54742	18460
4	09345	86343	56410	20067
5	11151	88077	58077	21673
6	12956	89811	59744	23278
7	14761	91543	61410	24882
8	16565	93275	63076	26487
9	18368	95007	64741	28090
10	20170	96737	66405	29693
11	21972	98467	68069	31295
12	23773	3.4000196	69732	32897
13	25573	01925	71394	34498
14	27373	03653	73056	36098
15	29171	05380	74717	37698
16	30969	07106	76377	39298
17	32766	08832	78037	40896
18	34563	10557	79696	42494
19	36359	12282	81355	44092
20	38154	14005	83013	45689
21	39948	15728	84670	47285
22	41741	17451	86327	48881
23	43534	19173	87983	50476
24	45326	20893	89638	52071
25	47117	22614	91293	53665
26	48908	24333	92947	55258
27	50698	26052	94601	56851
28	52487	27771	96254	58444
29	54275	29483	97906	60035
30	56063	31205	99557	61626
31	57850	32921	3.4201208	63217
32	59636	34637	02859	64807
33	61421	36352	04509	66396

34	3.3863206	3.4038066	3.4206158	3.4367985
35	64990	39780	07806	69573
36	66773	41492	09454	71161
37	68555	43205	11101	72748
38	70337	44916	12748	74334
39	72118	46627	14394	75920
40	73898	48337	16039	77506
41	75678	50047	17684	79090
42	77457	51755	19328	80674
43	79235	53464	20972	82258
44	81012	55171	22614	83841
45	82789	56878	24257	85423
46	84565	58584	25898	87005
47	86340	60289	27539	88587
48	88114	61994	29180	90167
49	89888	63698	30820	91747
50	91661	65402	32459	93327
51	93433	67105	34097	94906
52	95205	68807	35735	96484
53	96975	70508	37372	98062
54	98746	72209	39009	99639
55	3.3900515	73909	40645	3.4401216
56	02284	75608	42281	02792
57	04052	77307	43916	04368
58	05819	79005	45550	05943
59	07585	80703	47183	07517
60	09351	82400	48816	09091
61	11116	84096	50449	10664
62	12880	85791	52080	12237
63	14644	87486	53712	13809
64	16407	89180	55342	15380
65	18169	90874	56972	16951
66	19931	92567	58601	18522
67	21691	94259	60230	20092

z	2400.	2500.	2600.	2700.
67	3.3921691	3.4094259	3.4260230	3.4420092
68	23452	95450	61858	21661
69	25211	97641	63486	23229
70	26969	99331	65113	24798
71	28727	3.4101021	66739	26365
72	30485	02710	68365	27932
73	32241	04398	69990	29499
74	33997	06085	71614	31065
75	35752	07772	73238	32630
76	37506	09459	74861	34195
77	39260	11144	76484	35759
78	41013	12829	78106	37322
79	42765	14513	79727	38885
80	44517	16197	81348	40448
81	46268	17880	82968	42010
82	48018	19562	84588	43571
83	49767	21244	86207	45132
84	51516	22925	87825	46692
85	53264	24605	89443	48252
86	55011	26285	91060	49811
87	56758	27964	92677	51370
88	58504	29643	94293	52928
89	60249	31320	95908	54485
90	61993	32998	97523	56042
91	63737	34674	99137	57598
92	65480	36350	3.4300751	59154
93	67223	38025	02364	60709
94	68964	39700	03976	62264
95	70705	41374	05588	63818
96	72446	43047	07199	65372
97	74185	44719	08809	66925
98	75924	46391	10419	68477
99	77662	48063	12029	70029
100	79400	49733	13638	71580

0	3.4471580	3.4623980	3.4771212	3.4913617
1	73131	25477	72660	15018
2	74681	26974	74107	16418
3	76231	28470	75553	17818
4	77780	29966	76999	19217
5	79329	31461	78445	20616
6	80877	32956	79890	22014
7	82424	34450	81334	23413
8	83971	35944	82778	24810
9	85517	37437	84222	26207
10	87063	38930	85665	27604
11	88608	40422	87108	29000
12	90153	41914	88550	30396
13	91697	43405	89991	31791
14	93241	44895	91432	33186
15	94784	46386	92873	34580
16	96326	47875	94313	35974
17	97868	49364	95753	37368
18	99410	50853	97192	38761
19	3.4500951	52341	98631	40154
20	02491	53828	3.4800069	41546
21	04031	55316	01507	42938
22	05570	56802	02945	44329
23	07109	58288	04381	45720
24	08647	59774	05818	47110
25	10184	61259	07254	48500
26	11721	62743	08689	49890
27	13258	64227	10124	51279
28	14794	65711	11559	52667
29	16329	67194	12993	54056
30	17864	68676	14426	55443
31	19399	70158	15859	56831
32	20932	71640	17292	58218
33	22466	73121	18724	59604

34	3,4523998	3.4674601	3,4820156	3,4960990
35	25531	76081	21587	62375
36	27062	77560	23018	63761
37	28593	79039	24448	65145
38	30124	80518	25878	66529
39	31654	81996	27307	67913
40	33183	83473	28736	69296
41	34712	84950	30164	70679
42	36241	86427	31592	72062
43	37769	87903	33019	73444
44	39296	89378	34446	74825
45	40823	90853	35873	76206
46	42349	92327	37299	77587
47	43875	93801	38725	78967
48	45400	95275	40150	80347
49	46924	96748	41574	81727
50	48449	98220	42998	83106
51	49972	99692	44422	84484
52	51495	3.4701163	45845	85862
53	53018	02634	47268	87240
54	54540	04105	48690	88617
55	56061	05575	50112	89994
56	57582	07044	51533	91370
57	59102	08513	52954	92746
58	60622	09982	54375	94121
59	62142	11450	55795	95496
60	63669	12917	57214	96871
61	65179	14384	58633	98245
62	66696	15851	60052	99619
63	68213	17317	61470	3,5000992
64	69730	18782	62888	02365
65	71246	20247	64305	03737
66	72762	21711	65721	05109
67	74277	23175	67138	06481

z	2800.	2900.	3000.	3100.
67	3.4574277	3.4723175	3.4867138	3.5006181
68	75791	24639	68554	07851
69	77305	26102	69969	09222
70	78819	27564	71384	10593
71	80332	29027	72798	11962
72	81844	30488	74212	13332
73	83356	31949	75626	14701
74	84867	33410	77039	16069
75	86378	34870	78451	17437
76	87889	36329	79863	18805
77	89399	37788	81275	20172
78	90908	39247	82686	21539
79	92417	40705	84097	22905
80	93925	42163	85507	24271
81	95433	43620	86917	25637
82	96940	45076	88326	27002
83	98446	36533	89735	28366
84	99953	47988	91144	29731
85	3.4601458	49443	92552	31094
86	02963	50898	93959	32458
87	04468	52352	95366	33821
88	05972	53806	96773	35183
89	07475	55259	98179	36545
90	08978	56712	99585	37907
91	10481	58164	3.4900990	39268
92	11983	59616	02395	40629
93	13484	61067	03799	41989
94	14985	62518	05203	43349
95	16486	63968	06607	44709
96	17986	65418	08009	46068
97	19485	66867	09412	47426
98	20984	68316	10814	48785
99	22482	69765	12216	50142
100	23980	71212	13617	51500

z	3200.	3300.	3400.	3500.
0	3.5051500	3.5185139	3.5314789	3.5440680
1	52857	86455	16066	41921
2	54213	87771	17343	43161
3	55569	89086	18619	44401
4	56925	90400	19895	45641
5	58280	91715	21171	46880
6	59635	93028	22446	48119
7	60990	94342	23721	49355
8	62344	95655	24996	50596
9	63697	96968	26270	51834
10	65050	98280	27544	53071
11	66403	99592	28817	54308
12	67755	3.5200903	30090	55545
13	69107	02214	31363	56781
14	70459	03525	32635	58018
15	71810	04835	33907	59253
16	73160	06145	35179	60489
17	74511	07455	36450	61724
18	75860	08764	37721	62958
19	77210	10073	38991	64193
20	78559	11381	40261	65427
21	79907	12689	41531	66660
22	81255	13996	42800	67894
23	82603	15303	44069	69126
24	83950	16610	45338	70359
25	85297	17916	46606	71591
26	86644	19222	47874	72823
27	87990	20528	49141	74055
28	89335	21833	50408	75286
29	90680	23138	51675	76517
30	92025	24442	52941	77747
31	93370	25746	54207	78977
32	94713	27050	55473	80207
33	96057	28353	56738	81436

z	3200.	3300.	3400.	3500.
34	3.5097400	3,5229656	3,5358003	3,5482665
35	98743	30958	59267	83894
36	3.5100085	32260	60532	85123
37	01427	33562	61795	86351
38	02768	34863	63059	87578
39	04109	36164	64322	88806
40	05450	37465	65584	90033
41	06790	38765	66847	91259
42	08130	40064	68109	92486
43	09469	41364	69370	93712
44	10808	42663	70631	94937
45	12147	43961	71892	96162
46	13485	45259	73153	97387
47	14823	46557	74413	98612
48	16160	47854	75672	99836
49	17497	49151	76932	3.5501060
50	18834	50448	78191	02283
51	20170	51744	79450	03507
52	21505	53040	80708	04730
53	22841	54335	81966	05952
54	24175	55631	83223	07174
55	25510	56925	84481	08396
56	26841	58219	85737	09618
57	28178	59513	86994	10839
58	29511	60807	88250	12059
59	30844	62100	89506	13280
60	32176	63393	90761	14500
61	33508	64685	92016	15720
62	34840	65977	93271	16939
63	36171	67269	94525	18158
64	37501	68560	95779	19377
65	38832	69851	97032	20595
66	40162	71141	98286	21813
67	41491	72431	99538	23031

z	3200.	3300.	3400.	3500.
67	3.5141491	3.5272431	3.5399538	3.5523031
68	42820	73721	3.5400791	24248
69	44149	75010	02043	25465
70	45478	76299	03295	26682
71	46805	77588	04546	27898
72	48133	78876	05797	29114
73	49460	80163	07048	30330
74	50787	81451	08298	31545
75	52113	82738	09548	32760
76	53439	84024	10798	33975
77	54764	85311	12047	35189
78	56089	86606	13296	36403
79	57414	87882	14544	37617
80	58738	89167	15792	38830
81	60062	90452	17040	40043
82	61386	91736	18288	41256
83	62709	93020	19535	42468
84	64031	94303	20781	43680
85	65354	95587	22028	44892
86	66676	96869	23274	46103
87	67997	98152	24519	47314
88	69318	99434	25765	48524
89	70639	3.5300716	27010	49735
90	71959	01997	28254	50944
91	73279	03278	29498	52154
92	74598	04558	30742	53363
93	75917	05839	31986	54572
94	77236	07118	33229	55781
95	78554	08398	34472	56989
96	79872	09677	35714	58197
97	81189	10955	36956	59404
98	82506	12234	38198	60612
99	83823	13512	39439	61818
100	85139	14789	40680	63025

0	3.5563025	3.56682017	3.5797836	3.5910646
1	64231	83191	98979	11759
2	65437	84364	3.5800121	12873
3	66643	85537	01263	13985
4	67848	86710	02405	15098
5	69053	87882	03547	16210
6	70257	89054	04688	17322
7	71461	90226	05829	18434
8	72665	91397	06969	19546
9	73869	92568	08110	20657
10	75072	93739	09250	21768
11	76275	94910	10389	22878
12	77477	96080	11529	23988
13	78680	97249	12668	25098
14	79881	98419	13807	26208
15	81083	99588	14945	27318
16	82284	3.5700757	16084	28427
17	83485	01926	17222	29536
18	84686	03094	18359	30644
19	85886	04262	19497	31753
20	87086	05429	20634	32861
21	88285	06597	21770	33968
22	89484	07764	22907	35076
23	90683	08930	24043	36183
24	91882	10097	25179	37290
25	93080	11263	26314	38397
26	94278	12428	27450	39503
27	95476	13594	28585	40609
28	96673	14759	29719	41715
29	97870	15924	30854	42820
30	99066	17088	31988	43925
31	3.5600262	18252	33122	45030
32	01458	19416	34255	46135
33	02654	20580	35388	47239

z	3600.	3700.	3800.	3900.
34	3.5603849	3·5721743	3.5836521	3.5948344
35	05044	22906	37654	49447
36	06239	24069	38786	50551
37	07433	25231	39918	51654
38	08627	26393	41050	52757
39	09820	27555	42181	53860
40	11014	28716	43312	54962
41	12207	29877	44443	56064
42	13399	31038	45574	57166
43	14592	32198	46704	58268
44	15784	33358	47834	59369
45	16975	34518	48963	60470
46	18167	35678	50093	61571
47	19358	36837	51222	62671
48	20548	37996	52351	63771
49	21739	39154	53479	64871
50	22929	40313	54607	65971
51	24118	41471	55735	67070
52	25308	42628	56863	68169
53	26497	43786	57990	69268
54	27685	44943	59117	70367
55	28874	46099	60244	71465
56	30062	47256	61370	72563
57	31250	48412	62496	73660
58	32437	49568	63622	74758
59	33624	50723	64748	75855
60	34811	51878	65873	76952
61	35997	53033	66998	78048
62	37183	54188	68123	79145
63	38369	55342	69247	80241
64	39555	56496	70371	81336
65	40740	57650	71495	82432
66	41925	58803	72618	83527
67	43109	59956	73742	84622

67	3.5643109	3.5759956	3.5873742	3.5984622
68	44293	61109	74865	85717
69	45477	62261	75987	86811
70	46661	63413	77110	87905
71	47844	64565	78232	88999
72	49027	65717	79353	90092
73	50209	66868	80475	91186
74	51392	68019	81596	92279
75	52573	69169	82717	93371
76	53755	70320	83838	94464
77	54936	71470	84958	95556
78	56117	72620	86078	96648
79	57298	73769	87198	97739
80	58478	74918	88317	98831
81	59658	76067	89436	99922
82	60838	77215	90555	3.6001013
83	62017	78363	91674	02103
84	63196	79511	92792	03193
85	64375	80659	93910	04283
86	65553	81806	95028	05373
87	66731	82953	96145	06462
88	67909	84100	97262	07551
89	69087	85246	98379	08640
90	70264	86392	99496	09729
91	71440	87538	3.5900612	10817
92	72617	88683	01728	11905
93	73793	89828	02844	12993
94	74969	90973	03959	14080
95	76144	92118	05075	15168
96	77320	93262	06189	16255
97	78494	94406	07304	17341
98	79669	95550	08418	18428
99	80843	96693	09532	19514
100	82017	97836	10646	20600

0	3.6020600	3.6127839	3.6232493	3.6334685
1	21685	28698	33527	35694
2	22771	29957	34560	36704
3	23856	31015	35594	37713
4	24941	32073	36627	38723
5	26025	33132	37660	39732
6	27109	34189	38693	40740
7	28193	35247	39725	41749
8	29277	36304	40757	42757
9	30361	37361	41789	43765
10	31444	38418	42821	44773
11	32527	39475	43852	45780
12	33609	40531	44884	46788
13	34692	41587	45915	47795
14	35774	42643	46945	48801
15	36855	43698	47976	49803
16	37937	44754	49006	50814
17	39018	45809	50036	51820
18	40099	46863	51066	52826
19	41180	47918	52095	53832
20	42261	48972	53124	54837
21	43341	50026	54153	55843
22	44421	51080	55182	56848
23	45500	52133	56211	57852
24	46580	53187	57239	58857
25	47659	54240	58267	59861
26	48738	55292	59295	60865
27	49816	56345	60322	61869
28	50895	57397	61350	62872
29	51973	58449	62377	63876
30	53050	59501	63404	64879
31	54128	60552	64430	65882
32	55205	61603	65457	66884
33	56282	62654	66483	67887

34	3.6057359	3.6163705	3.6267509	3.6368889
35	58435	64755	68534	69891
36	59512	65805	69559	70893
37	60587	66855	70585	71894
38	61663	67905	71610	72895
39	62738	68954	72634	73896
40	63814	70003	73659	74897
41	64888	71052	74683	75898
42	65963	72101	75707	76898
43	67037	73149	76730	77898
44	68111	74197	77754	78898
45	69185	75245	78777	79898
46	70259	76293	79800	80897
47	71332	77340	80823	81896
48	72405	78387	81845	82895
49	73478	79434	82867	83894
50	74550	80481	83889	84893
51	75622	81527	84911	85891
52	76694	82573	85933	86889
53	77766	83619	86954	87887
54	78837	84645	87975	88884
55	79909	85710	88996	89882
56	80979	86755	90016	90879
57	82050	87800	91036	91876
58	83120	88845	92057	92872
59	84190	89889	93076	93869
60	85260	90933	94096	94865
61	86330	91977	95115	95861
62	87399	93021	96134	96857
63	88468	94064	97153	97852
64	89537	95107	98172	98847
65	90605	96150	99190	99842
66	91674	97193	3.6300208	3.6400837
67	92742	98235	01226	01832

z	4000.	4100.	4200.	4300.
67	3.6092742	3.6198235	3.6301226	3.6401832
68	93809	99277	02244	02826
69	94877	3.6200319	03262	03820
70	95944	01360	04279	04814
71	97011	02402	05296	05808
72	98078	03443	06312	06802
73	99144	04484	07329	07795
74	3.6100210	05524	08345	08788
75	01276	06565	09361	09781
76	02342	07605	10377	10773
77	03407	08645	11392	11765
78	04472	09684	12408	12758
79	05537	10724	13423	13749
80	06602	11763	14438	14741
81	07666	12802	15452	15733
82	08730	13840	16467	16724
83	09794	14879	17481	17715
84	10857	15917	18495	18705
85	11921	16955	19508	19696
86	12984	17992	20522	20686
87	14046	19030	21535	21676
88	15109	20067	22548	22666
89	16171	21104	23560	23656
90	17233	22140	24573	24645
91	18295	23177	25585	25634
92	19356	24213	26597	26623
93	20417	25249	27609	27612
94	21478	26284	28620	28601
95	22539	27320	29632	29589
96	23599	28355	30643	30577
97	24660	29390	31653	31565
98	25720	30424	32664	32552
99	26779	31459	33674	33540
100	27839	32493	34685	34527

z	4400.	4500.	4600.	4700.
0	3.6434527	3.6532125	3.6627578	3.6720979
1	35514	33090	28522	21903
2	36500	34055	29466	22826
3	37487	35019	30410	23750
4	38473	35984	31353	24673
5	39459	36948	32296	25596
6	40445	37912	33239	26519
7	41430	38876	34182	27442
8	42416	39839	35125	28365
9	43401	40802	36067	29287
10	44386	41765	37009	30209
11	45371	42728	37951	31131
12	46355	43691	38893	32053
13	47339	44653	39835	32974
14	48323	45616	40776	33896
15	49307	46578	41717	34817
16	50291	47539	42658	35738
17	51274	48501	43599	36659
18	52257	49462	44539	37579
19	53240	50423	45480	38500
20	54223	51384	46420	39420
21	55205	52345	47360	40340
22	56187	53306	48299	41260
23	57169	54266	49239	42179
24	58151	55226	50178	43099
25	59133	56186	51117	44018
26	60114	57145	52056	44937
27	61095	58105	52995	45856
28	62076	59064	53933	46775
29	63057	60023	54872	47693
30	64037	60982	55810	48611
31	65017	61941	56748	49529
32	65997	62899	57685	50447
33	66977	63857	58623	51365

z	4400.	4500.	4600.	4700.
34	3.6467957	3.6564815	3.6659560	3.6752283
35	68936	65773	60497	53200
36	69915	66730	61434	54117
37	70894	67688	62371	55034
38	71873	68645	63307	55951
39	72851	69602	64244	56867
40	73830	70559	65180	57783
41	74808	71515	66116	58700
42	75785	72471	67051	59615
43	76763	73427	67987	60531
44	77740	74383	68922	61447
45	78718	75339	69857	62362
46	79695	76294	70792	63277
47	80671	77250	71727	64192
48	81648	78205	72661	65107
49	82624	79159	73595	66022
50	83600	80114	74530	66936
51	84576	81068	75463	67850
52	85552	82023	76397	68764
53	86527	82976	77331	69678
54	87502	83930	78264	70592
55	88477	84884	79197	71505
56	89452	85837	80130	72418
57	90426	86790	81062	73332
58	91401	87743	81995	74244
59	92375	88696	82927	75157
60	93349	89648	83859	76069
61	94322	90601	84791	76982
62	95296	91553	85723	77894
63	96269	92505	86654	78806
64	97242	93456	87585	79718
65	98215	94408	88516	80629
66	99187	95359	89447	81540
67	3.6500160	96310	90378	82452

67	3.6500160	3.6596310	3.6690378	3.6782452
68	01132	97261	91308	83362
69	02104	98212	92239	84273
70	03075	99162	93169	85181
71	04047	3.6600112	94099	86094
72	05018	01062	95028	87004
73	05989	02012	95958	87914
74	06960	02962	96887	88824
75	07930	03911	97816	89734
76	08901	04860	98745	90643
77	09871	05809	99674	91552
78	10841	06758	3.6700602	92461
79	11811	07706	01530	93370
80	12780	08655	02459	94279
81	13749	09603	03386	95187
82	14719	10551	04314	96096
83	15687	11499	05242	97004
84	16656	12446	06169	97912
85	17624	13393	07096	98819
86	18593	14340	08023	99727
87	19561	15287	08950	3.6800634
88	20528	16234	09876	01541
89	21496	17181	10802	02448
90	22463	18127	11728	03355
91	23430	19073	12654	04262
92	24397	20019	13580	05168
93	25361	20964	14506	06074
94	26331	21910	15431	06980
95	27297	22855	16356	07886
96	28263	23800	17281	08792
97	29229	24745	18206	09697
98	30195	25690	19130	10602
99	31160	26634	20054	11507
100	32125	27578	20979	12412

z	4800.	4900.	5000.	5100.
0	3.6812412	3.6901961	3.6989700	3.7075702
1	13317	02847	90569	76553
2	14222	03733	91437	77405
3	15126	04619	92305	78256
4	16030	05505	93173	79107
5	16934	06390	94041	79957
6	17838	07275	94908	80808
7	18741	08161	95776	81659
8	19645	09046	96643	82509
9	20548	09930	97510	83359
10	21451	10815	98377	84209
11	22354	11699	99244	85059
12	23256	12584	3.7000111	85908
13	24159	13468	00977	86758
14	25061	14352	01843	87607
15	25963	15235	02709	88456
16	26865	16119	03575	89305
17	27766	17002	04441	90154
18	28668	17835	05307	91003
19	29569	18768	06172	91851
20	30470	19651	07037	92700
21	31371	20534	07902	93548
22	32272	21416	08767	94396
23	33173	22298	09632	95244
24	34073	23180	10496	96091
25	34973	24062	11361	96939
26	35873	24944	12225	97786
27	36773	25826	13089	98633
28	37673	26707	13953	99480
29	38572	27588	14816	3.7100327
30	39471	28469	15680	01174
31	40370	29350	16543	02020
32	41269	30231	17406	02866
33	42168	31111	18269	03713

34	3.6843066	3.6931991	3.7019132	3.7104559
35	43965	32872	19995	05404
36	44863	33752	20857	06250
37	45761	34631	21719	07096
38	46659	35511	22582	07941
39	47556	36390	23444	08786
40	48454	37269	24305	09631
41	49351	38148	25167	10476
42	50248	39027	26028	11321
43	51145	39906	26890	12165
44	52041	40785	27751	13010
45	52938	41663	28612	13854
46	53834	42541	29472	14698
47	54730	43419	30333	15542
48	55626	44297	31193	16385
49	56522	45174	32054	17229
50	57417	46052	32914	18072
51	58313	46929	33774	18915
52	59208	47806	34633	19759
53	60103	48683	35493	20601
54	60998	49560	36352	21444
55	61892	50437	37212	22287
56	62787	51313	38071	23129
57	63681	52189	38929	23971
58	64575	53065	39788	24813
59	65469	53941	40647	25655
60	66363	54817	41505	26497
61	67256	55692	42363	27339
62	68149	56566	43221	28180
63	69043	57443	44079	29021
64	69936	58318	44937	29862
65	70828	59193	45794	30703
66	71721	60067	46654	31544
67	72613	60942	47509	32385

67	3.6872613	3.6960942	3.7047509	3.7132385
68	73506	61816	48366	33225
69	74398	62690	49223	34065
70	75290	63564	50080	34905
71	76181	64438	50936	35745
72	77073	65311	51792	36585
73	77964	66185	52649	37425
74	78855	67058	53505	38264
75	79746	67931	54360	39104
76	80637	68804	55216	39943
77	81528	69676	56072	40784
78	82418	70549	56927	41620
79	83308	71421	57782	42459
80	84198	72293	58637	43298
81	85088	73165	59492	44136
82	85978	74037	60347	44974
83	86867	74909	61201	45812
84	87756	75780	62055	46650
85	88646	76652	62910	47488
86	89535	77523	63764	48325
87	90423	78394	64617	49162
88	91312	79264	65471	50000
89	92200	80135	66324	50837
90	93089	81005	67178	51674
91	93977	81876	68031	52510
92	94864	82746	68884	53347
93	95752	83616	69737	54183
94	96640	84485	70589	55019
95	97527	85355	71442	55856
96	98414	86224	72294	56691
97	99301	87093	73146	57527
98	3.6900188	87963	73998	58363
99	01074	88831	74850	59198
100	01961	89700	75702	60033

0	3.7160033	3.7242759	3.7323938	3.7403627
1	60869	43578	24742	04416
2	61703	44397	25546	05206
3	62538	45216	26350	05995
4	63373	46035	27153	06784
5	64207	46854	27957	07573
6	65042	47672	28760	08362
7	65876	48491	29564	09151
8	66710	49309	30367	09939
9	67544	50127	31170	10728
10	68377	50945	31973	11516
11	69211	51763	32775	12304
12	70044	52581	33578	13092
13	70877	53398	34380	13880
14	71710	54215	35182	14668
15	72543	55033	35985	15455
16	73376	55850	36787	16243
17	74208	56667	37588	17030
18	75041	57483	38390	17817
19	75873	58300	39191	18604
20	76705	59116	39993	19391
21	77537	59933	40794	20177
22	78369	60749	41595	20964
23	79200	61565	42396	21750
24	80032	62380	43197	22537
25	80863	63196	43997	23323
26	81694	64012	44798	24109
27	82525	64827	45598	24895
28	83356	65642	46398	25680
29	84186	66457	47198	26466
30	85017	67272	47998	27251
31	85847	68087	48798	28037
32	86677	68901	49598	28822
33	87507	69716	50397	29607

z	5200.	5300.	5400.	5500.
34	3.7188337	3·7270530	3.7351196	3.7430392
35	89167	71344	51995	31176
36	89996	72158	52794	31961
37	90826	72972	53593	32745
38	91655	73786	54392	33530
39	92484	74599	55191	34314
40	93313	75413	55989	35098
41	94142	76226	56787	35881
42	94970	77039	57585	36665
43	95799	77852	58383	37449
44	96627	78664	59181	38232
45	97455	79477	59979	39015
46	98283	80290	60776	39799
47	99111	81102	61574	40582
48	99938	81914	62371	41365
49	3.7200766	82726	63168	42147
50	01593	83538	63965	42930
51	02420	84349	64762	43712
52	03247	85161	65558	44495
53	04074	85972	66355	45277
54	04901	86784	67151	46059
55	05727	87595	67948	46841
56	06554	88406	68744	47622
57	07380	89216	69540	48404
58	08206	90027	70335	49185
59	09032	90838	71131	49967
60	09857	91648	71926	50748
61	10683	92458	72722	51529
62	11508	93268	73517	52310
63	12334	94078	74312	53091
64	13159	94888	75107	53871
65	13984	95697	75902	54652
66	14809	96507	76696	55432
67	15633	97316	77491	56212

z	5200.	5300.	5400.	5500.
67	3.7215633	3.7297316	3.7377491	3.7456212
68	16458	98125	78285	56992
69	17282	98934	79079	57772
70	18106	99743	79873	58552
71	18930	3.7300551	80667	59332
72	19754	01360	81461	60111
73	20578	02168	82254	60890
74	21401	02977	83048	61670
75	22225	03785	83841	62449
76	23048	04593	84634	63228
77	23871	05400	85427	64006
78	24694	06208	86220	64785
79	25517	07015	87013	65564
80	26339	07823	87806	66342
81	27162	08630	88598	67120
82	27984	09437	89390	67898
83	28806	10244	90182	68676
84	29628	11051	90974	69454
85	30450	11857	91766	70232
86	31272	12663	92558	71009
87	32093	13470	93350	71787
88	32914	14276	94141	72564
89	33736	15082	94932	73341
90	34557	15888	95723	74118
91	35378	16693	96514	74895
92	36198	17499	97305	75672
93	37019	18304	98096	76448
94	37839	19109	98886	77225
95	38660	19914	99677	78001
96	39480	20719	3.7400467	78777
97	40300	21524	01257	79553
98	41120	22329	02047	80329
99	41939	23133	02837	81105
100	42759	23938	03627	81880

z	5600.	5700.	5800.	5900.
0	3.7481880	3.7558749	3.7634280	3.7708520
1	82656	59510	35029	09256
2	83431	60272	35777	09992
3	84206	61034	36526	10728
4	84981	61795	37274	11463
5	85756	62556	38022	12199
6	86531	63318	38770	12934
7	87306	64079	39518	13670
8	88080	64840	40266	14405
9	88854	65600	41014	15140
10	89629	66361	41761	15875
11	90403	67122	42509	16610
12	91177	67882	43256	17344
13	91950	68642	44003	18079
14	92724	69402	44750	18813
15	93498	70162	45497	19547
16	94271	70922	46244	20282
17	95044	71682	46991	21016
18	95817	72441	47737	21750
19	96590	73201	48484	22483
20	97363	73960	49230	23217
21	98136	74719	49976	23951
22	98908	75479	50722	24684
23	99681	76237	51468	25417
24	3.7500453	76996	52214	26150
25	01225	77755	52959	26884
26	01997	78513	53705	27616
27	02769	79272	54450	28349
28	03541	80030	55195	29082
29	04312	80788	55941	29814
30	05084	81546	56686	30547
31	05855	82304	57430	31279
32	06626	83062	58175	32011
33	07398	83819	58920	32743

34	3.7508168	3.7584577	3.7659664	3.7733475
35	08939	85334	60409	34207
36	09710	86091	61153	34939
37	10480	86848	61897	35670
38	11251	87605	62641	36402
39	12021	88362	63385	37133
40	12791	89119	64128	37864
41	13561	89875	64872	38596
42	14331	90632	65616	39326
43	15100	91388	66359	40057
44	15870	92144	67102	40788
45	16639	92900	67845	41519
46	17409	93656	68588	42249
47	18178	94412	69331	42979
48	18947	95168	70074	43710
49	19716	95923	70816	44440
50	20484	96678	71559	45170
51	21253	97434	72301	45899
52	22022	98189	73043	46629
53	22790	98944	73785	47359
54	23558	99699	74527	48088
55	24326	3.7600453	75269	48818
56	25094	01208	76011	49547
57	25862	01962	76752	50276
58	26629	02717	77494	51005
59	27397	03471	78235	51734
60	28164	04225	78976	52463
61	28932	04979	79717	53191
62	29699	05733	80458	53920
63	30466	06486	81199	54648
64	31232	07240	81940	55376
65	31999	07993	82680	56104
66	32766	08746	83421	56832
67	33532	09500	84161	57560

z	5600.	5700.	5800.	5900.
67	3.7533532	3.7609500	3.7684161	3.7757560
68	34298	10253	84901	58288
69	35065	11005	85641	59016
70	35831	11758	86381	59743
71	36596	12511	87121	60471
72	37362	13263	87860	61198
73	38128	14016	88600	61925
74	38893	14768	89339	62652
75	39659	15520	90079	63379
76	40424	16272	90818	64106
77	41189	17024	91557	64833
78	41954	17775	92296	65559
79	42719	18527	93035	66286
80	43483	19278	93773	67012
81	44248	20030	94512	67738
82	45012	20781	95250	68464
83	45777	21532	95988	69190
84	46541	22283	96727	69916
85	47305	23034	97465	70642
86	48069	23784	98203	71367
87	48832	24535	98940	72093
88	49596	25285	99678	72818
89	50359	26035	3.7700416	73543
90	51123	26786	01153	74268
91	51886	27536	01890	74993
92	52649	28286	02627	75718
93	53412	29035	03364	76443
94	54175	29785	04101	77167
95	54937	30534	04838	77892
96	55700	31284	05575	78616
97	56462	32033	06311	79340
98	57224	32782	07048	80065
99	57987	33531	07784	80789
100	58749	34280	08520	81512

z	6000.	6100.	6200.	6300.
0	3.7781512	3.7853298	3.7923917	3.7993405
1	82236	54010	24617	94095
2	82960	54722	25318	94784
3	83683	55434	26018	95473
4	84407	56145	62718	96162
5	85130	56857	27418	96851
6	85853	57568	28118	97540
7	86576	58279	28817	98228
8	87299	58990	29517	98917
9	88022	59701	30217	99605
10	88745	60412	30916	3.8000294
11	89467	61123	31615	00982
12	90190	61833	32314	01670
13	90912	62544	33014	02358
14	91634	63254	33712	03046
15	92356	63965	34411	03734
16	93078	64675	35110	04421
17	93800	65385	35809	05109
18	94522	66095	36507	05796
19	95243	66805	37206	06484
20	95965	67514	37904	07171
21	96686	68224	38602	07858
22	97408	68933	39300	08545
23	98129	69643	39998	09232
24	98850	70352	40696	099 19
25	99571	71061	41394	10605
26	3.7800291	71770	42091	11292
27	01012	72479	42789	11978
28	01732	73188	43486	12665
29	02453	73896	44183	13351
30	03173	74605	44880	14037
31	03893	75313	45578	14723
32	04613	76021	46274	15409
33	05333	76730	46971	16095

z	6000.	6100.	6200.	6300.
34	3.7806053	3.7877438	3.7947668	3.8016781
35	06773	78146	48365	17466
36	07492	78853	49061	18152
37	08212	79561	49757	18837
38	08931	80269	50454	19522
39	09650	80976	51150	20208
40	10369	81684	51846	20893
41	11088	82391	52542	21578
42	11807	83098	53238	22262
43	12526	83805	53933	22947
44	13245	84512	54629	23632
45	13963	85219	55324	24316
46	14681	85926	56020	25001
47	15400	86632	56715	25685
48	16118	87339	57410	26369
49	16836	88045	58105	27053
50	17554	88751	58800	27737
51	18272	89457	59495	28421
52	18989	90163	60190	29105
53	19707	90869	60884	29789
54	20424	91575	61579	30472
55	21141	92281	62273	31156
56	21859	92986	62967	31839
57	22576	93691	63662	32522
58	23293	94397	64356	33205
59	24010	95102	65050	33888
60	24726	95807	65743	34571
61	25443	96512	66437	35254
62	26159	97217	67131	35937
63	26876	97922	67824	36619
64	27592	98626	68517	37302
65	28308	99331	69211	37984
66	29024	3.7900035	69904	38666
67	29740	00739	70597	39348

68	30456	01444	71290	40031
69	31171	02148	71983	40712
70	31887	02852	72675	41394
71	32602	03555	73368	42076
72	33318	04259	74060	42758
73	34033	04963	74753	43439
74	34748	05666	75445	44121
75	35463	06370	76137	44802
76	36178	07073	76829	45483
77	36892	07776	77521	46164
78	37607	08479	78213	46845
79	38321	09182	78905	47526
80	39036	09885	79596	48207
81	39750	10587	80288	48887
82	40464	11290	80979	49568
83	41178	11992	81671	50248
84	41892	12695	82362	50929
85	42606	13397	83053	51609
86	43319	14099	83744	52289
87	44033	14801	84435	52969
88	44746	15503	85125	53649
89	45460	16205	85816	54329
90	46173	16906	86506	55009
91	46886	17608	87197	55688
92	47599	18309	87887	56368
93	48312	19011	88577	57047
94	49024	19712	89267	57726
95	49737	20413	89957	58405
96	50450	21114	90647	59085
97	51162	21815	91337	59763
98	51874	22516	92027	60442
99	52586	23216	92716	61121
100	53298	23917	93405	61800

z	6400.	6500.	6600.	6700.
0	3.8061800	3.8129134	3.8195439	3.8260748
1	62478	29802	96097	61396
2	63157	30470	96755	62044
3	63835	31138	97413	62692
4	64513	31805	98071	63340
5	65191	32473	98728	63988
6	65869	33141	99386	64635
7	66547	33808	3.8200043	65283
8	67225	34475	00700	65931
9	67903	35143	01354	66578
10	68580	35810	02015	67225
11	69258	36477	02672	67872
12	69935	37144	03328	68519
13	70612	37811	03985	69166
14	71290	38478	04642	69813
15	71967	39144	05298	70460
16	72644	39811	05955	71107
17	73320	40477	06611	71753
18	73997	41144	07268	72400
19	74674	41810	07924	73046
20	75350	42476	08580	73693
21	76027	43142	09236	74339
22	76703	43808	09892	74985
23	77379	44474	10548	75631
24	78055	45140	11203	76277
25	78731	45805	11859	76923
26	79407	46471	12514	77569
27	80083	47136	13170	78214
28	80759	47801	13825	78860
29	81434	48467	14480	79505
30	82110	49132	15135	80151
31	82785	49797	15790	80796
32	83460	50462	16445	81441
33	84136	51127	17100	82086

z	6400.	6500.	6600.	6700.
34	3.80844811	3.81151791	3.82177755	3.82827731
35	85485	52456	18409	83376
36	86160	53120	19064	84021
37	86835	53785	19718	84665
38	87510	54449	20372	85310
39	88184	55113	21027	85955
40	88859	55777	21681	86599
41	89533	56441	22335	87243
42	90207	57105	22989	87887
43	90881	57769	23643	88532
44	91555	58433	24296	89176
45	92229	59096	24950	89820
46	92903	59760	25603	90463
47	93577	60423	26257	91107
48	94250	61087	26910	91751
49	94924	61750	27563	92394
50	05597	62413	28216	93038
51	96270	63076	28869	93681
52	96944	63739	29522	94324
53	97617	64402	30175	94967
54	98290	65064	30828	95611
55	98962	65727	31481	96254
56	99635	66389	32133	96896
57	3.81100308	67052	32786	97539
58	00980	67714	33438	98182
59	01653	68376	34090	98824
60	02325	69038	34742	99467
61	02997	69700	35394	3.83000109
62	03670	70362	36046	00752
63	04342	71024	36698	01394
64	05013	71686	37350	02036
65	05685	72347	38002	02678
66	06357	73009	38653	03320
67	07029	73670	39305	03962

z	6400.	6500.	6600.	6700.
67	3.8107029	3.8173670	3.8239305	3.8303962
68	07700	74331	39956	04603
69	08371	74993	40607	05245
70	09043	75654	41258	05887
71	09714	76315	41909	06528
72	10385	76976	42560	07169
73	11056	77636	43211	07811
74	11727	78297	43862	08452
75	12398	78958	44513	09093
76	13068	79618	45163	09734
77	13739	80278	45814	10375
78	14409	80939	46464	11016
79	15080	81599	47114	11656
80	15750	82259	47765	12297
81	16420	82919	48415	12937
82	17090	83579	49065	13578
83	17760	84239	49715	14218
84	18430	84898	50364	14858
85	19100	85558	51014	15499
86	19769	86217	51664	16139
87	20439	86877	52313	16778
88	21108	87536	52963	17418
89	21778	88195	53612	18058
90	22447	88854	54261	18698
91	23116	89513	54910	19337
92	23785	90172	55559	19977
93	24454	90831	56208	20616
94	25123	91489	56857	21255
95	25792	92148	57506	21895
96	26460	92806	58154	22534
97	27129	93465	58803	23173
98	27797	94123	59451	23812
99	28465	94781	60100	24450
100	29134	95439	60748	25089

z	6800.	6900.	7000.	7100.
0	3.8325089	3.8388491	3.8450980	3.8512583
1	25728	89120	51601	13195
2	26366	89750	52221	13807
3	27005	90379	52841	14418
4	27643	91008	53461	15030
5	28281	91637	54081	15641
6	28919	92266	54701	16252
7	29558	92895	55321	16863
8	30195	93523	55941	17474
9	30833	94152	56561	18085
10	31471	94780	57180	18696
11	32109	95409	57800	19307
12	32746	96037	58419	19917
13	33384	96666	59038	20528
14	34021	97294	59658	21139
15	34659	97922	60277	21749
16	35296	98550	60896	22359
17	35933	99178	61515	22970
18	36570	99806	62134	23580
19	37207	3.8400433	62752	34190
20	37844	01061	63371	24800
21	38480	01688	63990	25410
22	39117	02316	64608	26020
23	39754	02943	65227	26629
24	40390	03571	65845	27239
25	41027	04198	66463	27849
26	41663	04825	67081	28458
27	42299	05452	67700	29068
28	42935	06079	68318	29677
29	43571	06706	68935	30286
30	44207	07332	69553	30895
31	44843	07959	70171	31504
32	45479	08586	70789	32113
33	46114	09212	71406	32722

z	6800.	6900.	7000.	7100.
34	3.8346750	3.8409838	3.8472024	3.8533331
35	47385	10465	72641	33940
36	48021	11091	73258	34548
37	48656	11717	73876	35157
38	49291	12343	74493	35765
39	49926	12969	75110	36374
40	50561	13595	75727	36982
41	51196	14220	76343	37590
42	51831	14846	76960	38198
43	52465	15472	77577	38806
44	53100	16097	78193	39414
45	53735	16722	78810	40022
46	54369	17348	79426	40630
47	55003	17973	80043	41238
48	55638	18598	80659	41845
49	56272	19223	81275	42453
50	56906	19848	81891	43060
51	57540	20473	82507	43668
52	58174	21098	83123	44275
53	58807	21722	83739	44882
54	59441	22347	84355	45489
55	60075	22971	84970	46096
56	60708	23596	85586	46703
57	61341	24220	86201	47310
58	61975	24844	86817	47917
59	62608	25468	87432	48524
60	63241	26092	88047	49130
61	63874	26716	88662	49737
62	64507	27340	89277	50343
63	65140	27964	89892	50949
64	65773	28588	90507	51556
65	66405	29211	91122	52162
66	67038	29835	91736	52768
67	67670	30458	92351	53374

z	6800.	6900.	7000.	7100.
67	3.8367670	3.8430458	3.8492351	3.8553374
68	68303	31081	92965	53980
69	68935	31705	93580	54586
70	69567	32328	94194	55192
71	70199	32951	94808	55797
72	70832	33574	95423	56403
73	71463	34197	96037	57008
74	72095	34819	96651	57614
75	72727	35442	97264	58219
76	73359	36065	97878	58824
77	73990	36687	98492	59429
78	74622	37310	99106	60035
79	75253	37932	99719	60640
80	75884	38554	3.8500333	61244
81	76516	39176	00946	61849
82	77147	39798	01559	62454
83	77778	40420	02172	63059
84	78409	41042	02786	63663
85	79039	41664	03399	64268
86	79670	42286	04011	64872
87	80301	42907	04624	65476
88	80931	43529	05237	66081
89	81562	44150	05850	66685
90	82192	44772	06462	67289
91	82822	45393	07075	67893
92	83453	46014	07687	68497
93	84083	46635	08300	69101
94	84713	47256	08912	69704
95	85343	47877	09524	70308
96	85973	48498	10136	70912
97	86602	49119	10748	71515
98	87232	49739	11360	72118
99	87861	50360	11972	72722
100	88491	50980	12583	73325

z	7200.	7300.	7400.	7500.
0	3.8573325	3.8633229	3.8692317	3.8750613
1	73928	33823	92904	51192
2	74531	34418	93491	51771
3	75134	35013	94077	52349
4	75737	35608	94664	52928
5	76340	36202	95251	53507
6	76943	36797	95837	54086
7	77545	37391	96423	54664
8	78148	37985	97010	55243
9	78750	38580	97596	55821
10	79353	39174	98182	56399
11	79955	39768	98768	56978
12	80557	40362	99354	57556
13	81159	40956	99940	58134
14	81761	41550	3.8700526	58712
15	82363	42143	01112	59290
16	82965	42737	01697	59868
17	83567	43331	02283	60445
18	84169	43924	02868	61023
19	84770	44517	03454	61601
20	85372	45111	04039	62178
21	85973	45704	04624	62756
22	86575	46297	05209	63333
23	87176	46890	05795	63911
24	87777	47483	06380	64488
25	88379	48076	06965	65065
26	88980	48669	07549	65642
27	89581	49262	08134	66219
28	90181	49855	08719	66796
29	90782	50447	09304	67373
30	91383	51040	09888	67950
31	91984	51632	10473	68526
32	92584	52225	11057	69103
33	93185	52817	11641	69680

34	3.8593785	3.8653409	3.8712226	3.8770256
35	94385	54001	12810	70833
36	94986	54593	13394	71409
37	95586	55185	13978	71985
38	96186	55777	14562	72561
39	96786	56369	15146	73137
40	97386	56961	15729	73713
41	97985	57552	16313	74289
42	98585	58144	16897	74865
43	99185	58735	17480	75441
44	99784	59327	18064	76017
45	3.8600384	59918	18647	76592
46	00983	60509	19230	77168
47	01583	61100	19814	77743
48	02182	61691	20397	78319
49	02781	62282	20980	78894
50	03380	62873	21563	79469
51	03979	63464	22146	80045
52	04578	64055	22728	80620
53	05177	64646	23311	81195
54	05776	65236	23894	81770
55	06374	65827	24476	82345
56	06973	66417	25059	42919
57	07571	67008	25641	83494
58	08170	67598	26224	84069
59	08768	68188	26806	84643
60	09366	68778	27388	85218
61	09964	69368	27970	85792
62	10562	69958	28552	86367
63	11160	70548	29134	86941
64	11758	71138	29716	87515
65	12356	71728	30298	88089
66	12954	72317	30880	88663
67	13552	72907	31461	89237

z	7200.	7300.	7400.	7500.
67	3.8613552	3.8672907	3.8731461	3.8789237
68	14149	73496	32043	89811
69	14747	74086	32625	90385
70	15344	74675	33206	90959
71	15941	75264	33787	91532
72	16539	75853	34369	92106
73	17136	76442	34950	92680
74	17733	77031	35531	93253
75	18330	77620	36112	93826
76	18927	78209	36693	94400
77	19524	78798	37274	94973
78	20120	79387	37855	95546
79	20717	79975	38435	96119
80	21314	80564	39016	96692
81	21910	81152	39597	97265
82	22507	81740	40177	97836
83	23103	82329	40757	98411
84	23699	82917	41338	98983
85	24296	83505	41918	99556
86	24892	84093	42498	3.8800128
87	25488	84681	43078	00701
88	26084	85269	43658	01273
89	26679	85857	44238	01846
90	27275	86444	44818	02418
91	27871	87032	45398	02990
92	28467	87620	45978	03562
93	29062	88207	46557	04134
94	29658	88794	47137	04706
95	30253	89382	47716	05278
96	30848	89969	48296	05850
97	31443	90556	48875	06421
98	32039	91143	49454	06993
99	32634	91730	50034	07564
100	33229	92317	50613	08136

z	7600.	7700.	7800.	7900.
0	3.8808136	3.8864907	3.8920946	3.8976271
1	08707	65471	21503	76821
2	09279	66035	22059	77370
3	09850	66599	22616	77920
4	10421	67163	23173	78469
5	10992	67726	23729	79019
6	11563	68290	24285	79568
7	12134	68854	24842	80117
8	12705	69417	25398	80667
9	13276	69980	25954	81216
10	13847	70544	26510	81765
11	14417	71107	27066	82314
12	14988	71670	27622	82863
13	15558	72233	28178	83412
14	16129	72796	28734	83960
15	16699	73359	29290	84509
16	17269	73922	29846	85058
17	17840	74485	30401	85606
18	18410	75048	30957	86155
19	18980	75610	31512	86703
20	19550	76173	32068	87252
21	20120	76736	32623	87800
22	20689	77298	33178	88348
23	21259	77860	33733	88897
24	21829	78423	34288	89445
25	22398	78985	34843	89993
26	22968	79547	35398	90541
27	23537	80109	35953	91089
28	24107	80671	36508	91636
29	24676	81233	37063	92184
30	25245	81795	37618	92732
31	25815	82357	38172	93279
32	26384	82918	38727	93827
33	26953	83480	39281	94375

z	7600.	7700.	7800.	7900.
34	3.8827522	3.8884042	3.8939836	3.8994922
35	28090	84603	40390	95469
36	28659	85165	40944	96017
37	29228	85726	41498	96564
38	29797	86287	42053	97111
39	30365	86848	42607	97658
40	30934	87410	43161	98205
41	31502	87971	43715	98752
42	32070	88532	44268	99299
43	32639	89093	44822	99846
44	33207	89653	45376	3.9000392
45	33775	90214	45929	00939
46	34343	90775	46483	01486
47	34911	91336	47037	02032
48	35479	91896	47590	02579
49	36047	92457	48143	03125
50	36614	93017	48697	03671
51	37182	93577	49250	04218
52	37750	94138	49803	04764
53	38317	94698	50356	05310
54	38885	95258	50909	05856
55	39452	95818	51462	06402
56	40019	96378	52015	06948
57	40586	96938	52568	07494
58	41154	97498	53120	08039
59	41721	98058	53673	08585
60	42288	98617	54225	09131
61	42855	99177	54778	09676
62	43421	99736	55330	10222
63	43988	3.8900296	55883	10767
64	44555	00855	56435	11313
65	45122	01415	56987	11858
66	45688	01974	57539	12403
67	46255	02533	58091	12948

z	7600.	7700.	7800.	7900.
67	3.8846255	3.8902533	3.8958091	3.9012948
68	46821	03092	58643	13493
69	47387	03651	59195	14038
70	47954	04210	59747	14583
71	48520	04769	60299	15128
72	49086	05328	60851	15673
73	49652	05887	61403	16218
74	50218	06445	61954	16762
75	50784	07004	62506	17307
76	51350	07563	63057	17851
77	51915	08121	63608	18396
78	52481	08679	64160	18940
79	53047	09238	64711	19485
80	53612	09796	65262	20029
81	54178	10354	65813	20573
82	54743	10912	66364	21117
83	55308	11470	66915	21661
84	55874	12028	67466	22205
85	56439	12586	68017	22749
86	57004	13144	68568	23293
87	57569	13702	69118	23837
88	58134	14259	69669	24381
89	58699	14817	70220	24924
90	59263	15375	70770	25468
91	59828	15932	71320	26011
92	60393	16489	71871	26555
93	60957	17047	72421	27098
94	61522	17604	72971	27641
95	62086	18161	73521	28185
96	62651	18718	74071	28728
97	63215	19275	74621	29271
98	63779	19832	75171	29814
99	64343	20389	75721	30357
100	64907	20946	76271	30900

z	8000.	8100.	8200.	8300.
0	3.9030900	3.9084850	3.9138139	3.9190781
1	31443	85386	38668	91304
2	31985	85922	39198	91827
3	32528	86458	39727	92350
4	33071	86994	40255	92873
5	33613	87530	40786	93396
6	34156	88066	41315	93919
7	34698	88602	41844	94442
8	35241	89137	42373	94965
9	35783	89673	42903	95488
10	36325	90209	43432	96010
11	36867	90744	43961	96533
12	37409	91279	44489	97055
13	37951	91815	45018	97578
14	38493	92350	45547	98100
15	39035	92885	46076	98623
16	39577	93420	46604	99145
17	40119	93955	47133	99667
18	40661	94490	47661	3.9200189
19	41202	95025	48190	00711
20	41744	95560	48718	01233
21	42285	96095	49246	01755
22	42827	96630	49775	02277
23	43368	97165	50303	02799
24	43909	97699	50831	03321
25	44450	98234	51359	03842
26	44992	98768	51887	04364
27	45533	99303	52415	04886
28	46074	99837	52943	05407
29	46615	3.9100371	53471	05929
30	47155	00905	53998	06450
31	47696	01440	54526	06971
32	48237	01974	55054	07493
33	48778	02508	55581	08014

34	3.9049318	3.9103042	3.9156109	3.9208535
35	49859	03576	56636	09056
36	50399	04109	57163	09577
37	50940	04643	57691	10098
38	51480	05177	58218	10619
39	52020	05710	58745	11140
40	52560	06244	59272	11661
41	53101	06778	59799	12181
42	53641	07311	60326	12702
43	54181	07844	60853	13222
44	54721	08378	61380	13743
45	55260	08911	61907	14263
46	55800	09444	62433	14784
47	56340	09977	62960	15304
48	56880	10510	63487	15824
49	57419	11043	64013	16345
50	57959	11576	64539	16865
51	58498	12109	65066	17385
52	59038	12642	65592	17905
53	59577	13174	66118	18425
54	60116	13707	66645	18945
55	60655	14240	67171	19465
56	61195	14772	67697	19984
57	61734	15305	68223	20504
58	62273	15837	68749	21024
59	62812	16369	69275	21543
60	63350	16902	69800	22063
61	63889	17434	70326	22582
62	64428	17966	70852	23102
63	64967	18498	71378	23621
64	65505	19030	71903	24140
65	66044	19562	72429	24659
66	66582	20094	72954	25179
67	67121	20626	73479	25698

z	8000.	8100.	8200.	8300.
67	3.9067121	3.9120626	3.9173479	3.9225698
68	67659	21157	74005	26217
69	68197	21689	74530	26736
70	68735	22221	75055	27255
71	69273	22752	75580	27773
72	69812	23234	76105	28292
73	70350	23815	76630	28811
74	70887	24346	77155	29330
75	71425	24878	77680	29848
76	71963	25409	78205	30367
77	72501	25940	78730	30885
78	73038	26471	79254	31404
79	73576	27002	79779	31922
80	74114	27533	80303	32440
81	74651	28064	80828	32958
82	75188	28595	81352	33477
83	75726	29126	81877	33995
84	76263	29656	82401	34513
85	76800	30187	82925	35031
86	77337	30717	83449	35549
87	77874	31248	83973	36066
88	78411	31778	84497	36584
89	78948	32309	85021	37102
90	79485	32839	85545	37620
91	80022	33369	86069	38137
92	80559	33899	86593	38655
93	81095	34430	87117	39172
94	81632	34960	87640	39690
95	82169	35490	88164	40207
96	82705	36019	88687	40724
97	83241	36549	89211	41242
98	83778	37079	89734	41759
99	84314	37609	90258	42276
100	84850	38139	90781	42793

z	8400.	8500.	8600.	8700.
0	3.9242793	3.9294189	3.9344984	3.9395193
1	43310	94700	45489	95692
2	43827	95211	45994	96191
3	44344	95722	46499	96690
4	44860	96233	47004	97189
5	45377	96743	47509	97688
6	45894	97254	48013	98187
7	46410	97764	48518	98685
8	46927	98275	49023	99184
9	47444	98785	49527	99683
10	47960	99296	50032	3.9400132
11	48476	99806	50536	00680
12	48993	3.9300316	51040	01179
13	49509	00826	51544	01677
14	50025	01336	52040	02176
15	50541	01847	52553	02674
16	51057	02357	53057	03172
17	51573	02866	53561	03670
18	52089	03376	54065	04169
19	52605	03886	54569	04667
20	53121	04396	55073	05165
21	53637	04906	55576	05663
22	54152	05415	56080	06161
23	54668	05925	56584	06659
24	55184	06434	97087	07157
25	55699	06944	57591	07654
26	56215	07453	58095	08152
27	56730	07963	58598	08650
28	57245	08472	59101	09147
29	57761	08981	59605	09645
30	58276	09490	60108	10142
31	58791	09999	60611	10640
32	59306	10508	61114	11137
33	59821	11017	61617	11635

z	8400.	8500.	8600.	8700.
34	3.9260336	3.9311526	3.9362120	3.9412132
35	60851	12035	62623	12629
36	61366	12544	63126	13126
37	61880	13053	63629	13623
38	62395	13561	64132	14120
39	62910	14070	64635	14617
40	63424	14579	65137	15114
41	63939	15087	65640	15611
42	64453	15596	66143	16108
43	64968	16104	66645	16605
44	65482	16612	67148	17101
45	65997	17121	67650	17598
46	66511	17629	68152	18095
47	67025	18137	68655	28591
48	67539	18645	69157	19088
49	68053	19153	69659	19584
50	68567	19661	70161	20081
51	69081	20169	70663	20577
52	69595	20677	71165	21073
53	70109	21185	71667	21569
54	70622	21692	72169	22065
55	71136	22200	72671	22561
56	71650	22708	73172	23058
57	72163	23215	73674	23553
58	72677	23723	74176	24049
59	73190	24230	74677	24545
60	73704	24738	75179	25041
61	74217	25245	75680	25537
62	74730	25752	76182	26032
63	75243	26259	76683	26528
64	75757	26767	77184	27024
65	76270	27274	77686	27519
66	76783	27781	78187	28015
67	77296	28288	78688	28510

z	8400.	8500.	8600.	8700.
67	3.9277296	3.9328288	3.9378688	3.9428510
68	77808	28795	79189	29005
69	78321	29301	79690	29501
70	78834	29808	80191	29996
71	79347	30315	80692	30491
72	79859	30822	81193	30986
73	80372	31328	81693	31481
74	80885	31835	82194	31976
75	81397	32341	82695	32471
76	81909	32848	83195	32966
77	82422	33354	83696	33461
78	82934	33860	84196	33956
79	83446	34367	84697	34450
80	83959	34873	85197	34945
81	84471	35379	85698	35440
82	84983	35885	86198	35934
83	85495	36391	86698	36429
84	86007	36897	87198	36923
85	86518	37403	87698	37418
86	87030	37909	88198	37912
87	87542	38415	88698	38406
88	88054	38920	89198	38900
89	88565	39426	89698	39395
90	89077	39932	90198	39889
91	89588	40437	90697	40383
92	90100	40943	91197	40877
93	90611	41448	91697	41371
94	91123	41953	92196	41865
95	91634	42459	92696	42358
96	92145	42964	93195	42852
97	92656	43469	93695	43346
98	93167	43974	94194	43840
99	93678	44479	94693	44333
100	94189	44984	95193	44827

z	8800.	8900.	9000.	9100.
0	3.9441827	3.9493900	3.9542425	3.9590414
1	45320	94388	42908	90891
2	45814	94876	43390	91368
3	46307	95364	43872	91845
4	46800	95852	44355	92322
5	47294	96339	44837	92799
6	47787	96827	45319	93276
7	48280	97315	45802	93753
8	48773	97802	46284	94230
9	49266	98290	46766	94707
10	49759	98777	47248	95184
11	50252	99264	47730	95660
12	50745	99752	48212	96137
13	51238	3.9500239	48694	96614
14	51730	00726	49176	97090
15	52223	01213	49657	97567
16	52716	01701	50139	98043
17	53208	02188	50621	98520
18	53701	02675	51102	98996
19	54193	03162	51584	99472
20	54686	03649	52065	99948
21	55178	04135	52547	3.9600425
22	55671	04622	53028	00901
23	56163	05109	53510	01377
24	56655	05596	53991	01853
25	57147	06082	54472	02329
26	57639	06569	54953	02805
27	58131	07055	55434	03280
28	58623	07542	55915	03756
29	59115	08028	56397	04232
30	59607	08515	56877	04708
31	60099	09001	57358	05183
32	60591	09487	57839	05659
33	61082	09973	58320	06135

z	8800.	8900.	9000.	9100.
34	3.9461574	3.9510459	3.9558801	3.9606610
35	62066	10946	59282	07086
36	62557	11432	59762	07561
37	63048	11918	60243	08036
38	63540	12404	60723	08512
39	64031	12889	61204	08987
40	64523	13375	61684	09462
41	65014	13861	62165	09937
42	65505	14347	62645	10412
43	65996	14832	63125	10887
44	66487	15318	63606	11362
45	66978	15803	64086	11837
46	67469	16289	64566	12312
47	67960	16774	65046	12787
48	68451	17260	65526	13262
49	68942	17745	66006	13736
50	69433	18230	66486	14211
51	69923	18716	66966	14686
52	70414	19201	67445	15160
53	70905	19686	67925	15635
54	71395	20171	68405	16109
55	71886	20656	68885	16583
56	72376	21141	69364	17058
57	72866	21626	69844	17532
58	73357	22111	70323	18006
59	73847	22595	70803	18481
60	74337	23080	71282	18955
61	74827	23565	71761	19429
62	75317	24049	72241	19903
63	75807	24534	72720	20377
64	76297	25018	73199	20851
65	76787	25503	73678	21325
66	77277	25987	74157	21799
67	77767	26472	74636	22272

2	8500.	8600.	8700.	8800.
67	3.9477767	3.9526472	3.9574636	3.9622272
68	78257	26956	75115	22746
69	78747	27440	75594	23220
70	79236	27924	76073	23693
71	79726	28409	76552	24167
72	80215	28893	77030	24640
73	80705	29377	77509	25114
74	81194	29861	77988	25587
75	81684	30345	78466	26061
76	82173	30823	78945	26534
77	82662	31312	79423	27007
78	83151	31796	79902	27481
79	83641	32280	80380	27954
80	84130	32763	80858	28427
81	84619	33247	81337	28900
82	85108	33730	81815	29373
83	85597	34214	82293	29846
84	86085	34697	82771	30319
85	86574	35181	83249	30792
86	87063	35664	83727	31264
87	87552	36147	84205	31737
88	88040	36631	84683	32210
89	88529	37114	85161	32683
90	89018	37597	85639	33155
91	89506	38080	86117	33628
92	89995	38563	86594	34100
93	90483	39046	87072	34573
94	90971	39529	87549	35045
95	91460	40012	88027	35517
96	91948	40494	88505	35990
97	92436	40977	88982	36462
98	92924	41460	89459	36934
99	93412	41943	89937	37406
100	93900	42425	90414	37878

z	9200.	9300.	9400.	9500.
0	3.9637878	3.9684829	3.9731279	3.9777236
1	38350	85296	31741	77693
2	38822	85763	32202	78150
3	39294	86230	32664	78607
4	39766	86697	33126	79064
5	40238	87164	33588	79521
6	40710	87630	34050	79978
7	41181	88097	34511	80435
8	41653	88564	34973	80892
9	42125	89030	35435	81348
10	42596	89497	35896	81805
11	43068	89966	36358	82262
12	43539	90430	36819	82718
13	44011	90896	37281	83175
14	44182	91362	37742	83631
15	44953	91829	38203	84088
16	45425	92295	38664	84544
17	45896	92761	39126	85001
18	46367	93227	39587	85457
19	46838	93693	40048	85913
20	47309	94159	40509	86369
21	47780	94625	40970	86826
22	48251	95091	41431	87282
23	48722	95557	41892	87738
24	49193	96023	42353	88194
25	49664	96488	42814	88650
26	50134	96954	43274	89106
27	50605	97420	43735	89562
28	51076	97885	44196	90017
29	51546	98351	44656	90473
30	52017	98816	45117	90929
31	52488	99282	45577	91385
32	52958	99747	46038	91840
33	53428	3.9700213	46498	92296

z	9200.	9300.	9400.	9500.
34	3.9653899	3.9700678	3.9746959	3.9792751
35	54369	01143	47419	93207
36	54839	01608	47879	93662
37	55309	02074	48340	94118
38	55780	02539	48800	94573
39	56250	03004	49260	95028
40	56720	03469	49720	95484
41	57190	03934	50180	95939
42	57660	04399	50640	96394
43	58130	04863	51100	96849
44	58599	05328	51560	97304
45	59069	05793	52020	97759
46	59539	06258	52479	98214
47	60009	06722	52939	98669
48	60478	07187	53399	99124
49	60948	07652	53858	99579
50	61417	08116	54318	3.9800034
51	61887	08581	54778	00488
52	62356	09045	55237	00943
53	62826	09509	55697	01398
54	63295	09974	56156	01852
55	63764	10438	56615	02307
56	64233	10902	57075	02761
57	64703	11366	57534	03216
58	65172	11830	57993	03670
59	65641	12294	58452	04125
60	66110	12758	58911	04579
61	66579	13222	59370	05033
62	67048	13686	59829	05487
63	67517	14150	60288	05042
64	67985	14614	60747	06390
65	68454	15078	61206	06850
66	68923	15542	61665	07304
67	69392	16005	62124	07758

z	9200.	9300.	9400.	9500.
67	3.9669392	3.9716005	3.9762124	3.9807758
68	69860	16469	62582	08212
69	70329	16932	63041	08666
70	70797	17396	63500	09119
71	71266	17859	63958	09573
72	71734	18323	64417	10027
73	72203	18786	64875	10481
74	72671	19249	65334	10934
75	73139	19713	65792	11388
76	73607	20176	66251	11841
77	74076	20639	66709	12295
78	74544	21102	67167	12748
79	75012	21565	67625	13202
80	75480	22028	68083	13655
81	75948	22491	68541	14108
82	76416	22954	68999	14562
83	76883	23417	69457	15015
84	77351	23880	69915	15468
85	77819	24343	70373	15921
86	78287	24805	70831	16374
87	78754	25268	71289	16827
88	79222	25731	71747	17280
89	79690	26193	72204	17733
90	80157	26656	72662	18686
91	80625	27118	73120	18639
92	81092	27581	73577	19092
93	81559	28043	74035	19544
94	82027	28506	74492	19997
95	82494	28968	74950	20450
96	82961	29430	75407	20902
97	83428	29892	75864	21355
98	83895	30354	76322	21807
99	84362	30816	76779	22260
100	84829	31279	77236	22712

z	9600.	9700.	9800.	9900.
0	3.9822712	3.9867717	3.9912261	3.9956352
1	23165	68165	12704	56791
2	23617	68613	13147	57229
3	24069	69060	13590	57668
4	24522	69508	14033	58106
5	24974	69955	14476	58545
6	25426	70403	14919	58983
7	25878	70850	15362	59422
8	26330	71298	15805	59860
9	26782	71745	16247	60298
10	27234	72192	16690	60737
11	27686	72640	17133	61175
12	28138	73087	17575	61613
13	28589	73534	18018	62051
14	29041	73981	18461	62489
15	29493	74428	18903	62927
16	29945	74875	19345	63365
17	30396	75322	19788	63803
18	30848	75769	20230	64241
19	31299	76216	20673	64679
20	31751	76663	21115	65117
21	32202	77109	21557	65554
22	32654	77556	21999	65992
23	33105	78003	22441	66430
24	33556	78449	22884	66368
25	34007	78896	23326	67305
26	34459	79343	23768	67743
27	34910	79789	24210	68180
28	35361	80236	24651	68618
29	35812	80682	25093	69055
30	36263	81128	25535	69492
31	36714	81575	25977	69930
32	37165	82021	26419	70367
33	37616	82467	26860	70804

34	3.9838066	3.9882913	3.9927302	3.9971242
35	38517	83360	27744	71679
36	38968	83806	28185	72116
37	39419	84252	28627	72553
38	39869	84698	29068	72990
39	40320	85144	29510	73427
40	40770	85590	29951	73864
41	41221	86035	30392	74301
42	41671	86481	30834	74738
43	42122	86927	31275	75174
44	42572	87373	31716	75611
45	43022	87818	32157	76048
46	43473	88264	32598	76485
47	43923	88710	33039	76921
48	44373	89155	33480	77358
49	44823	89601	33921	77794
50	45273	90046	34362	78231
51	45723	90492	34803	78667
52	46173	90937	35244	79104
53	46623	91382	35685	79540
54	47073	91828	36126	79976
55	47523	92273	36566	80413
56	47973	92718	37007	80849
57	48422	93163	37448	81285
58	48872	93608	37888	81721
59	49322	94053	38329	82157
60	49771	94498	38769	82593
61	50221	94943	39210	83029
62	50670	95388	39650	83465
63	51120	95833	40090	83901
64	51569	96278	40531	84337
65	52019	96722	40971	84773
66	52468	97167	41411	85209
67	52917	97612	41851	85645

z	9600.	9700.	9800.	9900.
67	3.9852917	3.9897612	3.9941851	3.9985645
68	53366	98056	42291	86080
69	53816	98501	42731	86516
70	54265	98946	43172	86952
71	54714	99390	43612	87387
72	55163	99835	44051	87823
73	55612	3.9900279	44491	88258
74	56061	00723	44931	88694
75	56510	01168	45371	89129
76	56959	01612	45811	89564
77	57407	02056	46251	90000
78	57856	02500	46690	90435
79	58305	02944	47130	90870
80	58754	03389	47569	91305
81	59202	03833	48009	91741
82	59651	04277	48448	92176
83	60099	04721	48888	92611
84	60548	05164	49327	93046
85	60996	05608	49767	93481
86	61445	06052	50206	93916
87	61893	06496	50645	94350
88	62341	06940	51085	94785
89	62790	07383	51524	95220
90	63238	07827	51963	95655
91	63686	08270	52402	96090
92	64134	08714	52841	96524
93	64582	09158	53280	96959
94	65030	09601	53719	97393
95	65478	10044	54158	97828
96	65926	10488	54597	98262
97	66374	10931	55036	98697
98	66822	11374	55474	99131
99	67270	11818	55913	99566
100	67717	12261	56352	4.0000000

Inhalt
des
zweyten Theils.

Erste Abtheilung.

Von den entgegengesetzten Zahlen . . Seite 1 bis 12.

Zweyte Abtheilung.

Von der Buchstabenrechnung . . . . . 13 — 31.

Dritte Abtheilung.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel . . 32 — 65.

Vierte Abtheilung.

Von der Ausziehung der Cubikwurzel . . . 66 — 94.

Fünfte Abtheilung.

Von den Progressionen . . . . . 95 — 125.

Sechste Abtheilung.

Von den Logarithmen . . . . . 126 — 178.

2.

1.

5.

4.

5.

3.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Anleitung zur Elementar-Arithmetik

Bd.: 2

Offenbach 1821
Math.p. 224 g-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082048-2